NA POPIS PUBLICZNY

UCZNIÓW

Szkoły Wydziałowéy XX. Piiarów

W OPOLU

Odbydź się maiący w dniach 30 i 31 miesiąca Lipca 1830 r.

X. REKTOR I NAUCZYCIELE PRZEŚWIETNĄ PUBLICZNOŚĆ

ZAPRASZAIĄ.

Za pozwoleniem Cenzury Rządowéy.

STAN SZKOŁY,

krótka jéj historja, i niektóre Uwagi Rektora tyczące się Uczniów.

Zgromadzenie Nauczycielskie w roku szkolnym 18$\frac{29}{30}$ składały następne osoby:

Xiądz Paulin Siekierzyński Rektor dawał Naukę Moralną w Klassach I, II, Język Łaciński w Klassie IV, Język Niemiecki w Klassie II.

X. Joachim Milanowski, Religją w III, Moralną w III, IV, Język Polski w I, IV.

X. Mateusz Piechowski, Religją w IV, Jeografją w II, III, Historją Naturalną przez wszystkie Klassy, Technologją w IV.

X. Ignacy Mościcki, Religją w II, Język Polski w II, Historją Polską w II i IV, Historją Powszechną w II, III, IV.

X. Napoleon Gros, Język Łaciński w IV, Matematykę w I, Fizykę w II i III, Chemją w IV, Historją Polską w III, Jeografją w IV.

X. Piotr Sciegienny, Religją w I, Język Polski w III, Język Łaciński w II i III, Jeografją w I.

X. Franciszek Miérzowski, Historją Świętą w I, Język Łaciński w I, Język Niemiecki w III i IV.

Pan Karol Skowroński Magister Filozofii, Matematykę w II, III, IV, Fizykę w IV.

P. Ignacy Komorowski, Historją Polską w I, Kalligrafją w I, II, III, Rysunki przez wszyskie Klassy.

P. Tomasz Bogusławski Nauczyciel Klassy Początkowéy.

Nauczyciele prywatni: Pan Franciszek Müller rodem z Szwajcarji Francuzkiéy, Metr Języka Francuzkiego. — P. Jan Luge Metr Muzyki.

Wszystkich Uczniów było zapisanych w piérwszém półroczu 136, w drugiém podobnież 136.

Nadto utrzymywaną jest Szkoła elementarna, czyli Klassa Początkowa, dla młodzieży przy Instytucie Opolskim sposobiącéy się do Klassy I. Exystuje ona dopiéro drugi rok, dla tego więc nie mogła jeszcze sta-

nąć na należytéj stopie, pomimo najusilniéjszych starań miéjscowé j Zwierzchności. Liczyła ta Klassa w roku szkolnym upłynionym Uczniów 42.

Mieszkania Uczniów w mieście były podzielone na trzy Rewiry zostające pod wyłączném okiem szczegółowych Nauczycieli Szkoły. Rektor przy tém wraz z wszystkimi innymi zwiedzali często Uczniów w różnych porach dnia, przeglądali książki, papiéry, rzeczy, i t. p. i uwagi swoje zapisywali w osobnych książeczkach zwanych Kontrollami. W. Kurator Szkół Województwa Lubelskiego również w czasie każdéj swéj wizyty, zwiedzał wszystkich Uczniów, badał stan ich mieszkania i rzeczy, i zapisywał w powyżéj wspomniane Kontrolle swe uwagi.

Przy Szkole Opolskiéj XX. Pijarów istnieje Konwikt, w którym umieszczeni Uczniowie zostając pod szczególnym dozorem Rektora i XX. Pijarów, oprócz uczęszczania na lekcje szkolne, i objaśniania onych przez właściwych Nauczycieli, mieli sobie prywatnie wykładane: Język Francuzki przez P. Müller, język Niemiecki przez X. Mierzowskiego, a niektórzy pobiérali i lekcje muzyki, któréj udzielał P. Jan Luge.

Rektor łącznie ze Zgromadzeniem Nauczycielskiém oświadcza, iż postępowanie Uczniów Szkoły Opolskiéj, ich obyczaje i pilność w przykładaniu się do nauk, były odpowiadającémi woli wysokiego Rządu, nadziejom Rodziców i Opiekunów.

Oprócz nauk objętych wewnętrznem Urządzeniem, mieli jeszcze Uczniowie Klassy III i IV w czasie wolnym, to iest po południu w dni rekreacyjne we Wtorki i we Czwartki od godziny 2 do 4 udzielane sobie lekcje języka Francuzkiego. Chciał przez to Rektor uzupełnić chęci wielu Rodziców, którzy tę naukę za potrzebną dla dzieci swoich poczytywali. Miał i tę uwagę, aby Uczniowie przenoszący się do Szkół Wojewódzkich, nie mieli sobie zupełnie obcym tego języka. Jak we wszystkich innych przedmiotach, tak równie i w języku Francuzkim starali się Uczniowie korzystać.

Klassa IV za udzielonem sobie pozwoleniem, czytała z korzyścią książki znajdujące się w Bibljotece Szkolnéj, których liczba, dzięki troskliwéj opiece Wysokiéj Kommissji Rządowéj W. R. i O. P. corocznie pomnaża się ważnémi i pożytecznémi dziełami.

Rok Szkolny $18\frac{29}{30}$ był bardzo szczęśliwym co do zdrowia Uczniów. Bardzo mała ich liczba chorowała, a żadnego zgon nie zasmucił Rodziców i Szkoły.

W półroczu letniém P. Skowroński wychodził z Uczniami na stósowanie Jeometrji do mierzenia gruntów i robienia planów. W tym ro-

ku Klassa III z pomocą stolika i lasek mierzyła i robiła Mappę osady *Piszczek*, zaś Klassa IV z kątomiarem obok zastósowania wiadomości w Trygonometryi nabytych, zdéjmowała cząstkowe plany okolic Opola, a mianowicie osady *Zajeziorze*.

W stósownéj porze Klassa IV odbywała exkursye botaniczne z Nauczycielem X. Piechowskim.

Muzeum narzędzi fizycznych zostające pod dozorem Rektora Szkoły, ułatwiało wykład Fizyki. Liczyło w tym roku narzędzi fizycznych 82, matematycznych 23.

Zbiór najpotrzebniéjszych apparatów chemicznych, przynajmniéj główniéjsze téj umiejętności *facta* objaśnić Uczniom dozwolił.

Gabinet mineralogiczny posiada sztuk 135, a Bibljoteka Szkolna tomów 491, prócz Mapp, Atlasów, Wzorów Rysunkowych i Kalligraficznych.

Tu mamy sobie za najmilszy obowiązek wspomnieć, iż cały prawie zbiór Zoologiczny (w którym według zdania znawców wiele rzadkich i pięknie zakonserwowanych exemplarzy znajduje się) jest szacownym darem szczególnéj opiekunki Zgromadzenia i Szkoły Opolskiéj, JW. Rozalji z Książąt Lubomirskich Hrabiny Rzewuskiéj, która ciągle zaszczycając z macierzyńską starannością swémi względami Instytut Opolski, dowodzi iż w niéj płynie zacna krew jednéj z najpiérwszych Polskiego plemienia rodzin. Godna swych przodków córa, prawa Obywatelka, Matka swych poddanych, oto trzy tytuły, które najzasłużeniéj są udziałem téj pobożnéj i uczonéj Pani.

Zgromadzenie XX. Pijarów do Opola sprowadzone zostało staraniem ś. p. Jana Tarło Wojewody Sandomierskiego w roku 1743. Piérwszym *Superiorem* w Opolu, był X. Ignacy Konarski S. P. ówczesny Ex-Prowincjał, brat sławnego i uczonego Stanisława Konarskiego. Dobroczynne zapisy w ilości złotych Polskich 30,000, które Tarło jako Dziedzic Państwa Opolskiego wraz z żoną swą Zofją z Krasińskich, zrobił dla Zgromadzenia XX. Pijarów, chociaż dowodzą Jego łaskawości, żadnéj jednak korzyści nie przynoszą, procent bowiem od tego kapitału, po nieszczęsném ulokowaniu go na dobrach *Potycz*, zupełnie przestał dochodzić. Zgromadzenie wezwane przez ś. p. Tarłę, jedynie w celu zajmowania się Parafją, byłoby niezawodnie miało zapewnione dostateczne fundusze na utrzymanie się, gdyby zawczesna śmierć nie była nam wydarła tego piérwszego Fundatora Pijarów Opolskich. Pozostała po nim małżonka, połączyła się ślubami małżeńskiemi z Antonim Księciem Lubomirskim. Tracąc przeto w Tarle jednego Dobrodzieja, zy-

skaliśmy natomiast drugiego, który nie tylko sam świadczył wiele dobrego Pijarom, ale nawet zjednał nam w całéj rodzinie XX. Lubomirskich ciągłych Opiekunów Zgromadzenia. — Za życia swego zapisał Pijarom przeszło 20,000 złotych Polskich, od których procent (dzięki opiece ś. p. JO. Xięcia Alexandra Lubomirskiego i Jego Córki JW. Hrabiny Rzewuskiéj) jak najregularniéj dochodzi. — Lubo jakeśmy wyżéj wspomnieli, wyłącznym celem Pijarów Opolskich było zajmowanie się Parafją, Zgromadzenie jednak bacząc ciągle na swoje pierwiastkowe przeznaczenie, postarało się natychmiast o zaprowadzenie przynajmniéj Szkółki Elementarnéj, kiedy ówczesne okoliczności, wyższych Szkół nie dozwoliły od razu rozpocząć. — Piérwszy tą Szkółką trudnił się Kleryk nadesłany umyślnie do tego, z Podoleńca, przez Naczelnika Zgromadzenia. Zaprowadzenie Szkół wyższych winno Opole Księciu Alexandrowi Lubomirskiemu, który godnie wstępując w dobroczynne ślady swego poprzednika Antoniego, zajęty cały szczęściem swych poddanych, przedsięwziął podnieść tym sposobem Opole, i ułatwić, tak postronnym Obywatelom, jako téż dzieciom swych poddanych i mieszkańców Opola, edukacją wyższą. W tym zamiarze, górne Klass trzy zupełnie z fundamentów nowo wybudował, dwie Klassy dolne przerobił i wyrestaurował, a tak w roku 1800 pięć Klass gotowych dla młodzieży stanęło. W następnym roku otwarto Gymnasium, które dopiéro w roku 1803 Franciszek II Dekretem swym zaapprobował. Od tego czasu ciągle Szkoła Wyższa w Opolu składająca się z trzech Klass Normalnych i pięciu gymnazjalnych, exystowała, zmieniając tylko nazwisko według okoliczności czasowych. Zawczesny zgon Księcia Alexandra Lubomirskiego osiérocił na niejaki czas Zgromadzenie i Instytut Opolski z szczególnych Dobrodziejów. Ale ten przeciąg czasu smutny, wynagrodzony sowicie został, kiedy dzisiejsza Dziedziczka wzięła w swą opiekę Dobra Opolskie. Ciągłe i szacowne upominki, jakiémi corocznie obdarza Szkołę, zachęcanie Uczniów na każdym rocznym popisie, kosztownémi darami do cnoty i nauki, zniewalają tu Rektora, aby swojém, Szkoły i Rodziców imieniem najczulsze publicznie złożył podziękowanie. — Nie można i tego zamilczéć, iż sierot i ubogich Uczniów, staje się JW. Hrabina wielką Dobrodziéjką, wyznaczając im łaskawie obfite ordynarje i zasiłki pieniężne na utrzymanie się w Szkołach i pobiéranie w nich nauk. Kilka prawdziwie nieszczęśliwych rodzin doznaje téj szczególnéj opieki. — Jest to podobno najszlachetniéjszy i najskuteczniéjszy sposób zapewnienia sobie trwałéj i błogiéj pamięci u potomności. — Taż Pani, powodowana macierzyńskiém przywiązaniem do swych poddanych, u-

trzymuje ciągle Doktora, którego pomoc i lékarstwa z aptéki Opolskiéj dla nich są bezpłatne. Z tego dobrodziéjstwa, iż w każdéj potrzebie ratunek jest gotowym, korzysta równie Zgromadzenie, jak i Szkoła Opolska, za co także każdego serce jest wdzięcznością przejęte.

Jeżeli co może przyczyniać się do kwitnącego stanu każdego Instytutu, a zwłaszcza Naukowego, to zapewnie jak najściśléjsze pełnienie przepisów, jakie przezorna ręka Prawodawcy skreśliła, a władze wykonawcze do miéjscowych okoliczności stósowały. Rektor Szkoły Opolskiéj XX. Pijarów, pomimo ustawicznego przy Zapisach półrocznych i na Popisach publicznych przypominania przepisów dla Rodziców oddających swe dzieci do Szkół publicznych, ciągle prawie był wystawiany na nieprzyjemność, a to przez nieregularne, a czasem wcale nie uiszczane składanie opłaty półrocznéj przez niektórych Rodziców. Mógłby był wprawdzie Rektor użyć w tym razie środków, jakie wskazuje W. U. S. W. z roku 1820, bacząc jednak na krytyczne czasy i na położenie miéjsca, że okolica Opola tylko Magnatów dobra liczy, a zatém nie wiele Szlachty obywatelskiéj znajduje się, Uczniowie przeto po większéj części składają się z ubogich, wolał sam uzupełniać Kassę Szkolną, niżeli za niedostatek lub niewyrozumiałość Rodziców, pozbawiać dzieci ich sposobności kształcenia się w Szkole publicznéj. Przestawał przeto na ustawicznych wzywaniach i przypominaniu ciągłém. Gdy jednak długoletnie doświadczenie okazało, iż to było prawie daremném, używa jeszcze téj publicznéj drogi, zbijając również tu, dziwny przesąd niektórych Rodziców, i oświadcza iż pieniądze przez nich w ilości złotych Polskich 9 od każdego Ucznia co półroku składane, przechodzą w całkowitości do Kassy Głównéj Województwa Lubelskiego, która ich dopiéro według Rozporządzeń Wyższych, a mianowicie Wysokiéj Kommissji Rządowéj W. R. i O. P. używa.— Jeżeli jeszcze ten krok Rektora nie otrzyma pożądanego skutku, sami sobie niektórzy Rodzice przypiszą, jeżeli ujrzą dzieci swe nie mające miéjsca w Szkole.

Drugim równie ważnym przepisem W. K. R. W. R. i O. P. jest ustanowienie Dozorców domowych, czyli tak zwanych Dyrektorów lub Korrepetytorów. Wykonanie tego Ustanowienia, jak z jednéj strony nieuchronnie było potrzebném, tak z drugiéj znajdowało trudność w oziębłości niektórych Rodziców. Zdawało im się, iż to rzeczą jest wcale niepotrzebną, i że każdy Uczeń, byle pracowity i moralny (za jakiego zawsze prawie Rodzice dziécię swe uważają) może się bez tego obejść nie przymnażając kosztów na swą Edukacją. Tu już nie widział Rektor żadnego środka godzenia tak ciemnego wyobrażenia o rzeczy z Ustawami

Rządowémi. Postąpił przeto tak, jak postąpić należało, to jest przeniósł korzyść młodzieży nad przywidzenie Rodziców. Na jedném przeto z co miesięcznych posiedzeń Nauczycielskich, ustanowieni zostali Dozorcy z Klassy IV, z pomiędzy Uczniów celujących Bogobojnością, Obyczajami i Nauką. Ci zaś są następujący: *Z drugoletnich:* Wlazlacki Walenty, Swiechowski Antoni, Pakulski Antoni, Chróstowski Mateusz, Krasuski Wojciech, Czajkowski Wincenty, Modliński Stanisław, Pawłowski Antoni, Pawłowski Alexander. *Z piérwszoletnich*: Kwasecki Franciszek, Gąsiorowski Stanisław, Michalewski Adam, Gierasiński Antoni. — Do każdego z nich należy pewna liczba Uczniów (zachowując zawsze wzgląd na miéjscowe okoliczności), którzy pod surową odpowiedzialnością winni są uczęszczać do nich na Korrepetycje i pod ich dozorem domowym zostawać. Szczególniéj miany był na to wzgląd, aby ciż Dozorcy mieli mieszkania tam, gdzie największa liczba Uczniów ma stancje. W tém miéjscu dodaje Rektor, iż połowa większa Uczniów miała mieszkanie w murach (1) Pijarskich, a zatém pod podwójném okiem: Dozorców i Nauczycieli Szkoły.

Przypomina się Rodzicom i Opiekunom, iż obiéranie mieszkań dla Synów i Pupillów bez zaradzenia się poprzedniego i zawiadomienia Rektora, w żaden sposób następować nie może.

---

(1) Mury te dosyć mają ciekawy początek: Xiądz Ignacy Konarski S. P. doznając w roku 1756 wiele przeszkód ze stron różnych w założeniu Szkoły Publicznéj w Opolu, powziął nowy i szczęśliwy (gdyby skutek odpowiedział był usiłowaniom) pomysł, założyć Gimnazyum Rzemieślnicze w témże mieście. Ze Szkoły téj kierowanéj umiejętnymi Majstrami, młodzież niższego stanu, obeznana z Manufakturami, roznosiłaby swe wiadomości po różnych Polski Prowincjach. W tym celu, za pozwoleniem Dziedziców Opola, zaczął stawiać ozdobny i obszerny z Pawilonami Gmach roku 1758, i w kilka lat zupełnie go ukończył. Miał zamiar Konarski szczególniéj postarać się o usposobionych Stolarzy, Slusarzy, Garbarzy, Sukienników i Tkaczy; zwłaszcza że Dom ten mógł już wygodnie szesnastu Rzemieślników wraz z warsztatami pomieścić. Wezwano ich tedy pod bardzo korzystnémi warunkami zapewnionémi im na Sejmie z roku 1764. I tak: Kontrakty tylko na 5 lat ich obowiązywały, przez które powinni byli młodzież sposobić. Wyroby swoje komu chcieli, wolno im było przedawać za dowolną cenę. Uwolnieni byli od uciążliwych praw miejskich, a nawet wsparcie pieniężne było im zawsze zapewnione. Mieli swego *Senjora*, do którego należało rozstrzyganie sporów i dostawianie materjałów potrzebnych z ogólnéj Kassy. Lecz niedługo ten zakład istniał, współubieganie się bowiem innych miast, a mianowicie Lublina co do rzemiosł, trudność doboru umiejętnych i dobro ogółu mających na celu Majstrów, wyczerpawszy fundusze Założyciela, zniweczyło ten tak pożyteczny pomysł. — Dziś tylko już sześciu Sukienników Majstrów się znajduje w pomienionych murach, reszta zaś zabudowania tego, jakeśmy wspomnieli, stanowi po większéj części mieszkania Uczniów.

Co się tyczé rozwinień i zastósowań §§. Wewnętrznego Urządzenia S. W. przez Wysoką Kommissyą Rządową W. R. i O. P. w Reskryptach i Instrukcyach przez Nią ogłaszanych, te jak najściśléj staraliśmy się, aby były wykonywane.

Dla zachęcenia pilnych Uczniów do wytrwania w pracy, a moralnych w pięknéın prowadzeniu się, wymieniamy nazwiska tych, którzy za bogobojność, moralność i pilność w Naukach zasłużyli w półroczu letniém na zaszczyt umieszczenia ich w Księdze Sławy.

Z Klassy I. Tokarski Tomasz, Tutakiewicz Karol, Brzeziński Paweł, Hempel Joachim, Włodarkiewicz Łukasz, Kulesza Tomasz, Kotarbiński Eustachy, Grębowski Antoni, Kamieński Ludwik, Czerwiakowski Józef, Siemierzyński Paweł, Białkowski Józef.

Z Klassy II. Sobolewski Stanisław, Krzeczkowski Szymon, Jaworski Łukasz, Jasiński Joachim, Jounga Stanisław, Lisowski Józef, Nowiński Wincenty, Stylski Wawrzyniec, Radziszewski Polikarp.

Z Klassy III. Hempel Józef, Pruszyński Andrzéj, Koglarski Józef, Paszkowski Franciszek, Ulrich Maciéj, Wojciechowski Eugienjusz, Hoffmann Marcelli, Józefowicz Edward, Rzeżawiński Józef, Jankowski Stanisław.

Z Klassy IV. Wlazlacki Walenty, Jasiński Wiktor, Kwasecki Franciszek, Dąbrowski Karol, Swiechowski Antoni, Jankowski Ignacy, Fleszyński Rudolf, Chróstowski Mateusz, Gąsiorowski Stanisław, Pakulski Szymon.

Po ukończonym Popisie, Uczniom celującym bogobojnością, obyczajami i nauką, rozdane będą w Imieniu Wysokiéj Magistratury nagrody, tudzież udzielone pochwały. Podobnież ogłoszone będą publicznie nazwiska Uczniów zapisanych w ciągu roku szkolnego w księgę honoru. Ci, którzy większe lub mniéjsze nagrody otrzymają i którzy na pochwałę publiczną zasłużą, wkrótce przez Gazety ogłoszonymi zostaną. — Jakkolwiek jest gdzieindziéj zwyczaj ogłaszania Promocji po ukończonym Popisie rocznym, Szkoła jednak Opolska z dwóch względów przeniosła wstrzymanie się z tém, aż do początku roku szkolnego: 1° Iż Uczniowie promowowani, często ufni w ogłoszone posunięcie ich do Klassy wyż-

széj, nie pracowali przez Wakacje. 2°. Ci zaś, których nazwisk nie głoszono, powodowani jakąś dziecinną i fałszywą rozpaczą, również nic nie robili. Tym tedy sposobem z początku roku szkolnego, mało co więcéj umieli promowowani od nieposuniętych do Klassy wyższéj.— Po odczytaniu Księgi honoru, kilku z opuszczających Szkołę Uczniów, miéć będą mowy z pożegnaniem. Nareszcie po stósownéj ze strony Rektora odezwie do Rodziców, Opiekunów, Prezydującego i Uczniów, udadzą się wszyscy do Kościoła, aby złożyć Bogu podziękowanie za szczęśliwie przepędzony i zakończony rok szkolny, tudzież błagać Go, o pomyślność Panującego nam Miłościwie Najłaskawszego Króla Mikołaja I. i całéj Jego najdostojniejszéj Rodziny.

X. P. Siekierzyński Rektor S. P.

ROZPRAWA

OBEYMUIĄCA WYKŁAD SYNTETYCZNY

LINIY EPICYKLOYDALNYCH.

NAPISANA

przez

KAROLA SKOWROŃSKIEGO

Magistra Filozofii Nauczyciela Matematyki.

Matematyka iest to Królowa wszystkich nauk: iéy oblubieńcem iest prawda, a prostość i oczywistość iéy stroiem. — Ale przybytek téy Monarchini iest obsadzony cierniem, po którém przechodzić trzeba, — Nie ma on powabu tylko dla umysłów zamiłowanych w prawdzie, i lubiących walczyć z trudnościami. — Co także pokazuie niepospolitą i wyższego rzędu skłonność człowieka do zawiłych zaiste, ale trwałych i wyniosłych roskoszy umysłowych uzacniaiących naturę ludzką.

Wyimek z dzieła: Pisma rozmaite Jana Sniadeckiego, Tom 3. karta 205, wydanie Wileńskie z roku 1818 in 8vo majori.

ROZPRAWA

O LINIIACH EPICYKLOYDALNYCH.

Liniiami epicykloydalnemi nazywamy te, które, według pewnych praw, tworzą się przy obwodach innych liniy.— Samo ich nazwisko złożone z dwóch wyrazów greckich: ἐπί przy, κύκλος obwód, iuż nam rzecz samą poczęści objaśnia (1).— Wyłożyć prawa tworzenia się tych liniy, wskazać ogólne ich własności, i objaśnić całą materyią szczególnemi przykładami, iest przedmiotem ninieyszéy rozprawy.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

obéymuiąca ogólne prawa tworzenia się liniy Epicykloydalnych, ich własności i podział.

§. 1.— Uważaymy dwa iakiekolwiek ostrokręgi O, i Ó, maiące wspólny środek, i styczne do siebie wzdłuż iednéy i téy saméy tworzącéy (2);— czyli że iedna z płaszczyzn stycznych do O i Ó, iest styczną wzdłuż tworzącéy należącéy zarazem do obu ostrokręgów.— Niech ostrokrąg O będzie stały, zaś Ó poruszaiący się w ten sposób, że prawidło wyżéy podane nie zmienia się,— to iest: że będą miały zawsze wspólny środek, i warunek styczności zachowanym będzie.— Gdybyśmy obrali punkt iakikolwiek p któryby nie zmieniał swego położenia względem ostrokręgu Ó, czyli żeby stale był z nim połączony,— punkt ten w czasie obrotu iakiemu ostrokrąg Ó podlega, zakreśli krzywą liniią;— liniia ta w ogólności nazywa się Epicykloydalną, a punkt p rodzącym takową krzywą.

---

(1) Grecy nie sam obwód koła, iak niektórzy rozumieią,— ale obwód każdéy linii nazywali κύκλος;— do dziś mamy cykl Metona, czyli nazwisko κύκλος przeniesione do pewnego nawet obwodu czasu.

(2) Czytelników uważam za niepotrzebuiących tłómaczenia wyrazów: tworząca, kieruiąca, pozioma, pionowa, normalna, rzut, ślad, i t. p.;— używam ich przeto iako zkądinąd im znanych.

§. 2.— Punkt p w ciągu obrotu nie zmienia swego położenia względem ostrokręga Ó, więc nie zmienia swéy odległości od wspólnego środka ostrokręgów.— Epicykloydalna zatém znayduie się na powierzchni kuli, któréy środkiem iest wspólny wierzchołek ostrokręgów, a promieniem odległość rodzącego punktu p od wierzchołka ostrokręgów.

§. 3.— Krzywości maią się do siebie w stosunku odwrotnym promieni (3).— Powierzchnia zatém kuli na któréy znayduie się epicykloydalna będzie miała tém większą krzywość im promień iéy będzie krótszy;— i odwrotnie.— Jeżeli zatém powierzchnia takowéy kuli będzie miała promień nieskończenie wielki, krzywość iéy stanie się nieskończenie małą, czyli żadną;— więc powierzchnia kuli zamieni się na płaszczyznę,— a epicykloydalna iuż nie na powierzchni kuli, ale na płaszczyznie znaydować się będzie.

Z uważania na iakiéy powierzchni tworzy się epicykloydalna, podzielono te liniie na dwa główne działy:

A. Na sferyczne.— kiedy krzywa znayduie się na powierzchni kuli promienia skończonego.

B. Na płaskie,— kiedy krzywa znayduie się na powierzchni kuli promienia nieskończenie wielkiego, to iest na płaszczyznie.

§. 4.— Wielkość promienia kuli na któréy się tworzy epicykloydalna, stanowi odległość wspólnego środka ostrokręgów O i Ó od punktu rodzącego p (§. 2).— Krzywość przeto rzeczonéy kuli w ten czas dopiero stanie się żadną, kiedy ostrokręgi O i Ó będą miały wspólny wierzchołek w odległości nieskończenie wielkiéy;— albo raczéy kiedy się zamienią na walce.— Ztąd łatwo spostrzedz że tocząc ostrokrąg po ostrokręgu według prawideł podanych w §. 1., tworzymy epicykloydalną sferyczną;— tocząc zaś walec po walcu według tychże prawideł, otrzymuiemy płaską.

§. 5.— Czy to bierzemy pod uwagę dwa ostrokręgi, czyli dwa walce,— w obu razach możemy sobie wystawić że punkt rodzący epicykloydalną znayduie się:— albo na iednéy z liniy tworzących ostrokrąg lub walec ruchomy,— albo zewnątrz tychże tworzących,— albo wewnątrz.— Z tego wypada troisty gatunek liniy epicykloydalnych tak sferycznych iak płaskich.— I tak dzielimy ie:

a. Na zwyczayne, kiedy punkt rodzący p. znayduie się na tworzącéy ostrokrąg lub walec ruchomy.

---

(3) Obacz dowodzenie syntetyczne téy prawdy w Jeometryi Wykreślnéy Sapalskiego przed kilkoma laty wydanéy w Krakowie in 4to majori.

b. Na przedłużone, kiedy punkt rodzący znayduie się zewnątrz ostrokręgu lub walca ruchomego.

c. Na skrócone, kiedy tenże punkt rodzący p. znayduie się wewnątrz ostrokręgu lub walca ruchomego.

§. 6. — Ostrokrąg lub walec ruchomy ruch swóy może odbywać według prawideł w § 1. podanych znayduiąc się: — albo zewnątrz powierzchni ostrokręgu lub walca stałego, — albo wewnątrz. — Z tego wypływa ieszcze dwoisty podział liniy epicykloydalnych, tak sferycznych iak płaskich, zwyczaynych, przedłużonych i skróconych. — I tak dzielimy ie:

α. Na zewnętrzne, kiedy ostrokrąg lub walec ruchomy odbywa ruch swóy zewnątrz powierzchni ostrokręgu lub walca stałego.

β. Na wewnętrzne, kiedy ostrokrąg lub walec ruchomy odbywa swóy ruch wewnątrz powierzchni ostrokręgu lub walca stałego.

Uwaga: Wyliczone dotąd odmiany epicykloydalnych, daią nam ogólne wyobrażenie tych liniy, i ich gatunków. — Są wprawdzie ieszcze odmiany szczególne; — lecz że odmiany te nie rozciągaią się do wszystkich gatunków epicykloydalnych, ale tylko albo do samych płaskich, albo do samych skróconych, i t. p., przeto przy rozbiorze głównych gatunków, i o niektórych z tych, że ie tak nazwę, podgatunkach wspomnę.

CZĘŚĆ DRUGA.

O liniiach Epicykloydalnych w szczególności.

ODDZIAŁ PIERWSZY.

Epicykloydy sferyczne.

§. 7. — Jak rozmaite są ostrokręgi, tak rozmaite bydź mogą odmiany epicykloydalnych sferycznych; — nawet przez kombinowanie iednych ostrokręgów z drugiemi, możemy otrzymać liczbę nieskończenie wielką szczególnych odmian tych liniy. — Pomiędzy rozmaitemi ostrokręgami znayduią się proste, co się tworzą obrotem tróykąta prostokątnego wokoło iednego z boków przyległych kątowi prostemu. — Epicykloydalne utworzone takiemi ostrokręgami, są naypożyteczniéysze, bo iuż

maią obszerne zastósowanie w praktyce w rozmaitych machinach; — ten téż tylko ieden szczególny gatunek rozbierzemy. — Aby go rozróżnić od innych, liniie do niego należące nie epicykloydalnemi w ogólności, ale w szczególności Epicykloydami nazwiemy.

§. 8. — Dla tém większéy iednostayności zawsze brać będziemy płaszczyznę na którey się znayduie kieruiąca ostrokręgu stałego na poziomą rzutów, — i zawsze wystawiać sobie będziemy że pionowa rzutów przechodzi przez oś tego ostrokręgu, — która to oś tém samém iest prostopadłą do poziomey rzutów. — Nadto że płaszczyzna prostopadła do osi ostrokręgu ruchomego na któréy leży punkt rodzący p, przeciąwszy tenże ostrokrąg według koła, obwód iego w czasie tworzenia się epicykloydy, zawsze toczyć się będzie po obwodzie koła kieruiącego ostrokrąg stały, które iak się iuż rzekło, leży na poziomey rzutów.

§. 9. — Niech (S, SŚ) i (Sp, SB) będą osi dwóch ostrokręgów prostych znayduiące się na pionowéy rzutów (fig. I); — stykaią się te dwa ostrokręgi według (Sp, Śp) wspólnéy tworzącéy, która także znaydować się musi na pionowéy rzutów. — Przypuśćmy témczasowo że punkt rodzący znayduie się na tworzącéy (Sp, Śp), i ieżeli nim iest np. (p, p) (w dalszéy albowiem konstrukcyi inny punkt weźmiemy za rodzący), — możemy sobie wystawić iakoby ten punkt znaydował się na obwodzie koła prostopadłego do osi (Sp, ŚB), którego promieniem iest naykrótsza odległość punktu rodzącego od téyże osi, czyli iest naturalna wielkość linii Bp; gdyż koło to rzuca się pionowo według swóiey średnicy, bo iego płaszczyzna iest prostopadłą do pionowéy rzutów, — a liniia Bp równa się połowie średnicy. — Ostrokrąg utworzony obrotem tróykąta prostokątnego BpŚ znayduiącego się na pionowéy rzutów, niech będzie ruchomy, — drugi zaś utworzony tróykątem prostokątnym pSŚ także znayduiącym się na pionowéy rzutów, niech będzie stały. — W czasie obrotu ostrokręgu ruchomego po stałym, punkt p. rodzący epicykloydę będzie się znaydował na płaszczyznie koła prostopadłego do osi (Sp, BŚ). — Koło to ciągle toczyć się będzie po kole zakréśloném promieniem pS. (§. 8). — Płaszczyzny dwóch tych kół w każdém położeniu w czasie obrotu, czynią z sobą tenże sam kąt. — Moglibyśmy zatém usunąć ostrokrąg ruchomy i stały, i tylko wystawić sobie dwa koła, iedno promienia Bp. ruchome, drugie promienia pS. stałe po obwodzie którego piérwsze się toczy, — lecz tak, że w czasie obrotu płaszczyzny tych kół są do siebie zawsze nachylone pod tymże samym kątem.

§. 10. — Czy epicykloydy są zewnętrzne, czy wewnętzne, zawsze można usunąć ostrokręgi, a uważać same koła. — Dla tego więc aby iednéy materyi dwa razy nie powtarzać są zrobione figury (pod numerami: 1, 2, 4, 5, 6) na których obie epicykloydy się objaśniaią. — Część figury ze strony prawéy służy do objaśnienia epicykloyd zewnętrznych, ze strony lewéy do wewnętrznych. — Głoski w czasie rozumowania tak są brane, i na figurach tak umieszczane, aby kto chce wiedzieć sposób tworzenia się i wyznaczania rzutów epicykloydy zewnętrznéy, czytaiąc i patrząc na prawą stronę figury, był zaspokoionym; — i nawzaiem ktoby chciał wiedzieć sposób tworzenia się i wyznaczania rzutów epicykloydy wewnętrznéy, toż samo czytaiąc, lecz patrząc na lewą stronę figury, także był zaspokoionym.

§. 11. — Przy tworżeniu się epicykloyd przedłużonych i skróconych tak zewnętznych iak wewnętrznych, płaszczyzny kół stałego i ruchomego także są do siebie nachylone pod stałym kątem; — więc i w tym razie można usunąć ostrokręgi, a uważać koło ruchome toczące się po kole nieruchomém pod stałym kątem. — Co do wyznaczania punktów należących do epicykloyd przedłużonych lub skróconych, uważać trzeba że te się tworzą punktem leżącym na kole współśrodkowém z kołem ruchomém, którego promieniem iest odległość punktu rodzącego od środka koła ruchomego. — Oba te koła są położone na téyże samé y płaszczyznie.

§. 12. — Z tego cośmy dotąd powiedzieli, widzimy iak ważną iest rzeczą wiedziéć w każdym razie iaki czynią kąt pomiędzy sobą kół wspomnionych płaszczyzny. — Wielkość iego zależy od wielkości promieni kół stałego i ruchomego, i od odległości od nich wspólnego środka ostrokręgów stycznych. — Już wystawiliśmy sobie (§. 9.) że ostrokrąg ruchomy znayduie się w takiém położeniu, iż oś iego leży na pionowéy rzutów; — widzieliśmy że w tym razie wspólna tworząca obu ostrokręgów (Sp, Śp) i średnica koła ruchomego Ap. w swoiéy naturalnéy wielkości, leżą także na pionowéy rzutów. — Średnica Ap. zachowuiąc naturalną swą wielkość, nie przestaie bydź prostopadłą do osi ostrokręgu ruchomego. — Koło stałe z ruchomém stykaią się w punkcie p, — ieżeli więc z punktu p. wyprowadzę pB. równaiącą się promieniowi koła ruchomego pod takiém nachyleniem, iżby połączywszy iéy koniec B z punktem Ś, liniia BŚ. była równą osi ostrokręgu ruchomego, a tém samém do pB. prostopadłą; — po uskutecznieniu tego łatwo spostrzedz że kąt płaski ApS. zawarty pomiędzy promieniami kół stałego i ruchomego będzie kątem szukanym. — Wykonanie całéy konstrukcyi,

skoro iuż mamy dany kład koła ruchomego, a tém samém iego promień, polega na wyznaczeniu długości osi ostrokręgu ruchomego od wierzchołka S aż do przecięcia się z płaszczyzną koła na którèy leży punkt rodzący epicykloydę. — Oś rzeczona iest bokiem tróykąta prostokątnego, przyległym kątowi prostemu, — w którym przeciwprostokątną iest dana Sp. wspólna tworząca, — i iedno ramie kąta prostego pB. także iest dane, — więc tróykąt ten może bydź wykréślony, — a tém samém znalezione drugie ramie kąta prostego SB, czyli długość osi okręgu ruchomego. — Z tego wypada że skoro mamy kład koła ruchomego, i długość wspólnéy tworzącéy ostrokręgów — iuż możemy wyznaczyć kąt dwupłaszczyznowy pomiędzy płaszczyzną koła stałego i ruchomego.

Uwaga: Gdybyśmy wiedzieli iaki czynią kąt tworzące ostrokręgu ruchomego z iego osią, tém samém wiedzielibyśmy i długość żądaną osi; — bo tylko z punktu S poprowadzilibyśmy liniią BS. którąby ze wspólną tworzącą pS. czyniła kąt równy temu iaki czynią tworzące ostrokręgu ruchomego z iego osią, a z punktu p. na BS spuszczona prostopadła Bp. odznaczyłaby nam liniią BS. równą osi ostrokręgu ruchomego. — Maiąc długość osi, łatwo znaleść kąt dwupłaszczyznowy kół o którychesmy mówili.

§. 13. — Obwody kół maią się do siebie w stosunku prostym swoich promieni. — Ile więc razy promień koła ruchomego iest mnieyszy od promienia koła stałego, tyle razy obwód piérwszego iest mnieyszy od obwodu drugiego; — i przeciwnie. — Wystawmy sobie że np. promień koła stałego równa się czterém promieniom koła ruchomego; — w tym razie przypuściwszy że punkt rodzący p. znayduie się we wspólném zetknięciu się koła stałego z kładem koła ruchomego na poziomą rzutów, — łatwo wnioskować że koło ruchome cztery razy całkowitym swym obwodem się obróci, nim raz przebieży obwód koła stałego, — a tém samém punkt p. cztery razy powróci na obwód koła stałego. — Punkt p. za każdém odeyściem od obwodu koła stałego daie początek nowemu ramieniu epicykloydy; — każdy powrót punktu rodzącego p. na obwód koła stałego stanowi punkt zwrotu epicykloydy; — długość łuku stałego między iednym a drugim punktem zwrotu, zowie się podstawą ramienia epicykloydy, — podstawy te co do długości równaią się obwodowi koła ruchomego. — Liczba punktów zwrotu, ramion, i podstaw, zależy od stosunku pomiędzy promieniami kół; — w przypuszczeniu że promień koła ruchomego iest czwartą częścią promienia koła stałego, otrzymamy cztery pukta zwrotu, cztery podstaw, i cztery ramion epicykloydy. — Jeżeliby stosunek między promieniami kół dawał liczbę

nie

nie współmierną, liczba punktów zwrotu, podstaw i ramion epicykloydy stałaby się nieskończenie wielką.

§. 14. — W epicykloydach przedłużonych i skróconych także tyle będzie podstaw, ramion i punktów maiących podobieństwo do punktów zwrotu, ile razy promień koła stałego iest większy od promienia koła ruchomego. — Lecz w epicykloydzie przedłużonéy ostatnie iéy punkta przypadaią wewnątrz obwodu koła stałego, — w skróconéy zewnątrz, — w epicykloydzie zaś zwyczaynéy przypadały na obwodzie koła stałego. — Nadto w epicykloydach przedłużonych i skróconych iest tylko coś podobnego do punktów zwrotu, samych zaś punktów zwrotu niemasz.

§. 15. — Aby lepszego nabydź wyobrażenia o epicykloydach, podamy sposób wyznaczania ich za pomocą rzutów poziomego i pionowego. — Zacznijmy od epicykloydy zwyczaynéy:

Zagadnienie piérwsze: Wyznaczyć rzuty epicykloydy sferycznéy zwyczaynéy zewnętrznéy i wewnętrznéy.

Rozwiązanie: Płaszczyzna (fig: 1) koła stałego pHDDHpF. niech będzie poziomą rzutów (§. 8.); — zaś pxD'g kład poziomy koła ruchomego, którego płaszczyzna z poziomą rzutów czyni kąt ApS (§. 12). — Ponieważ te ostrokręgi są proste, więc (S, SS) oś stałego iest prostopadłą do poziomey rzutów. — Dotąd uważaliśmy za rodzący punkt p, — teraz go zmieńmy; — w tym celu przypuśćmy że początkiem toczenia kół tworzących epicykloydę, a zarazem punktem rodzącym iest D; — leży on widocznie na poziomey rzutów, — zatém sam siebie iest rzutem poziomym, a rzut iego pionowy i. znayduie się na osi płaszczyzn rzutów. — Mamy więc iuż wyznaczony ieden punkt należący do epicykloydy za pomocą rzutów, — z podobną łatwością wyznaczaią się wszystkie punkta zwrotu. — Lecz kiedy koło ruchome przeydzie do punktu H., w ten czas punkt rodzący będzie miał pewne wzniesienie nad poziomą rzutów; — idzie nam o wyznaczenie rzutów naprzód poziomego, a potém pionowego epicykloydy w tém położeniu. — Niech koło ruchome z punktu H., nieobracaiąc się, pośliźnie się na stałém do p. — Widoczną iest że koło ruchome przed pośliznięniem się swoiém przebiegło na stałém łuk DH; a zatém ieżeli na kole ruchomém od p. odetniemy łuk równy co do długości DH, tém samém znaydziemy na kładzie punkt D', rodzący epicykloydę; — ieżeli nadto wyznaczymy rzut iego poziomy i pionowy, — będziemy mieli rzuty punktu należącego do epicykloydy. — Aby to wykonać, prowadzę LM. płaszczyznę wertykalną przez osi ostrokręgów; — na téy wertykalnéy znayduie się (Sp, Sp) wspólna

tworząca według którey, po pośliznięciu się koła ruchomego, ostrokręgi są do siebie styczne, — daley znayduie się na niey kąt ApS. iaki czynią z sobą płaszczyzny kół; — nareszcie Ap. średnica koła ruchomego, które na tę płaszczyznę wertykalną rzuca się według średnicy, gdyż iego płaszczyzna iest prostopadłą do wertykalney LM. którąśmy dopiero poprowadzili. — Slady płaszczyzny koła ruchomego są: Cp. poziomy, Ap. pionowy. — Płaszczyznę (Cp, pA) obracaymy około iey śladu poziomego Cp. iako drzwi około zawiasy, dopóki nie położy się na poziomą rzutów; więc koło ruchome położy się na poziomą rzutów w swoiey naturalney wielkości pxD'g. — Na tym kładzie odcinam łuk pxD'. równy co do długości DH. łukowi koła stałego, punkt D'. iest wyżey wspomnionym kładem punktu rodzącego epicykloydę; — odpowiada on punktowi dotknięcia p. przez który przechodzi (Sp, Sp) wspólna tworząca zetknięcia się dwóch ostrokręgów, lecz w niewłaściwém położeniu ruchomego.

Mamy iuż w szczegolności kład punktu żądanego, idzie o wyznaczenie iego rzutów. — Odległość punktu rodzącego od linii Cp. wcale się nie zmienia w czasie obrotu płaszczyzny koła ruchomego około teyże linii Cp; — więc rzut poziomy tego punktu znayduie się na D'n. prostopadłey z punktu D' na Cp. spuszczoney. — Jeżeli z D'. spuścimy D'd. prostopadłą na oś płaszczyzn rzutów, przecięcie się tey prostopadłey z osią LM. da nam d. rzut pionowy kładu poziomego. — Zwracaymy płaszczyznę (Cp, pA) do iey naturalnego położenia; — w czasie tego zwracania punkt d. wcale nie zmienia swey odległości od p., więc zakréśli łuk dB. promieniem pd., który to łuk przecina liniią pA. w punkcie B. — Gdyby koło ruchome nie pośliznęło się z H. do p, ale gdyby styczność tych kół przypadała istotnie w p., — na ten czas punkt B. byłby rzutem pionowym iednego z punktów epicykloydy, rzutem zaś iego poziomym byłoby wspólne przecięcie się prostopadłey z B. na LM., a tém samém na równoodległą od niey D'n. spuszczoney, — mówię przecięcie się linii Bm. z liniią D'n., czyli punkt m. — Lecz że koło stałe innym punktem swego obwodu ma się dotykać tegoż punktu koła ruchomego, — więc ani rzut poziomy nie iest m., ani rzut pionowy epicykloydy nie iest B. — Wszelako znaleziony punkt (m, B) ułatwi nam znalezienie rzutu poziomego i pionowego punktu epicykloydy, kiedy koła stykaią się w H. — Jakoż przesuńmy koło ruchome z punktu p. do H. w ten sposób, aby się posunęło nie obracaiąc się, czyli aby nie odmieniło na swym obwodzie punktu styczności. — W czasie przesunięcia punkt m. zakréśli na poziomey rzutów promieniem Sm. łuk mo., — na którym

znayduie się rzut poziomy punktu należącego do epicykloydy.— Znayduie się on na wspomnionym łuku w odległości równéy linii mp., od przecięcia się wertykalnéy (HS, SS) z obwodem koła stałego, bo w takiéy odległości był położony od przecięcia się wertykalnéy LM. z obwodem tegoż koła;— obie te wertykalne przechodzą przez punkt styczności kół;— Jeżeli zatém z punktu H. promieniem HO=pm przetnę łuk mo., punkt przecięcia się należy do rzutu poziomego epicykloydy,— i takim iest o.— Wprawdzie wypadaią dwa punkta z przecięcia się owych łuków, ieden z iednéy, drugi z drugiéy strony wertykalnéy (HS, SS)— ten z nich bierze się za rzut poziomy, który odpowiada położeniu punktu m. względem LM. głównéy wertykalnéy.

Co do rzutu pionowego: Wiemy że wzniesienie się nad płaszczyznę poziomą punktu należącego do epicykloydy, którego rzut poziomy o., równa się linii Bz.,— wiemy że rzut iego pionowy znayduie się na prostopadłéy z punktu o. na oś LM. spuszczonéy;— Jeżeli zatém z punktu o. spuścimy oó. prostopadłą na oś, aż do przecięcia się z Bó. równoodległą od osi,— otrzymany punkt ó. iest rzutem pionowym.

Otrzymaliśmy punkt (o,ó) należący do epicykloydy;— przez podobne postępowanie otrzymalibyśmy tyle innych punktów, ileby się nam spodobało,— a tém samém całą epicykloydę.

§. 16.— Gdyby punkt rodzący epicykloydę znaydował się na głównéy wertykalnéy LM;— na ten czas różniłoby się na pozór wyznaczenie tego punktu za pomocą rzutów.— Jakoż wystawmy sobie że koło ruchome po stałém od D. potoczyło się do p;— po zrobieniu pxD'g. kładu koła ruchomego na poziomą rzutów, odetniymy na nim pD'g. łuk, równy co do długości DHp łukowi koła stałego;— z punktu g. spuśćmy prostopadłą na LM. oś płaszczyzn rzutów, przecięcie się téy prostopadłéy z osią LM. da nam rzut pionowy kładu poziomego.— Ponieważ punkt g. leży na osi płaszczyzn rzutów, więc długość prostopadłéy zamienia się w tym szczególnym przypadku na zero,— a punkt g. iest zarazem i kładem poziomym i rzutem pionowym kładu.— Płaszczyznę na któréy leży koło ruchome, a tém samém punkt rodzący, zwracaymy do iéy naturalnego położenia;— wiemy że w czasie tego obrotu punkt g. wcale nie zmieni swéy odległości od p;— więc zakréśli łuk Ag. promieniem pg.; łuk Ag. przecina liniią Ap. w punkcie A;— punkt zatém A. iest rzutem pionowym epicykloydy.— Co do rzutu poziomego tegoż punktu:— znayduie się on na prostopadłéy z punktu A. do osi LM., i na prostopadłéy z g. na Cp. spuszczonéy, a tém samém na równoodległéy od osi,— którą to równoodległą w tym razie iest sama oś LM;— więc znayduie

się na wspólném ich przecięciu się w punkcie a.— Punktem więc szukanym iest (a, A).

§. 17.— Przy wyznaczeniu iakiegokolwiek punktu epicykloydy, potrzebaby odbywać wskazaną powyżéy konstrukcyą,— coby nie mało czasu i pracy kosztowało;— idzie o oszczędzenie piérwszego i drugiego.— Zaradzi temu następuiące spostrzeżenie:—

Widzimy że punkt rodzący epicykloydę naprzód leży na poziomey rzutów, potém coraz bardziéy wznosi się nad nią,— dochodzi maximum swego wzniesienia, i znów zniża się w ten sam sposób w iaki się wznosił.— Podobnież punkt ten naprzód leży na obwodzie koła stałego, potém się coraz bardziéy od iego obwodu oddala,— dochodzi maximum swego oddalenia, i znów przybliża się w taki sam sposób w iaki się oddalał.— Spostrzeżenie to wielce nam ułatwi wyznaczanie rzutów epicykloydy.— Maximum wzniesienia i oddalenia razem miały mieysce,— przypadały w ten czas, kiedy w kole ruchomém cięciwa łącząca punkt rodzący z punktem styczności kół, zamieniła się na średnicę.— Gdybyśmy zatém mieli wyznaczone rzuty ramienia epicykloydy między iéy początkiem czyli punktem zwrotu, a między maximum wzniesienia i oddalenia punktu rodzącego, tém samém moglibyśmy wykréślić resztę rzutu poziomego epicykloydy od maximum do punktu zwrotu,— bo ta druga część zupełnie z piérwszą iest symetryczna na rzucie poziomym.— Równie maiąc wiadomy rzut pionowy między początkiem a maximum, i maiąc nadto rzuty poziome całego ramienia epicykloydy,— wyznaczymy z łatwością rzuty pionowe reszty tegoż ramienia,— bo iuż mamy wiadome wzniesienie się każdego punktu nad poziomą rzutów, i rzut iego poziomy.— Skoro iedno ramie iest wyznaczone za pomocą rzutów, iuż łatwo inne wszystkie wyznaczyć,— chociaż zupełna symetryczność ramion na rzutach poziomych nie zawsze prowadzi za sobą takąż na pionowych.

§. 18.— *Zagadnienie drugie*: Wyznaczyć rzuty epicykloydy sferyczney zewnętrzney i wewnętrzney przedłużoney i skróconey.

Gdybyśmy przybrali płaszczyzny kół służących za podstawy ostrokręgom prostym w sposób zupełnie podobny iak w zagadnieniu poprzedzaiącém (§. 8, 9, i 15), według tychże samych uwag któreśmy podali przy wyznaczaniu rzutów epicykloyd zwyczaynych, wyznaczylibyśmy rzuty epicykloyd przedłużonych lub skróconych tak zewnętrznych iak wewnętrznych.— Atoli pomiędzy wyznaczeniem rzutów epicykloyd zwyczaynych, a przedłużonych lub skróconych dwie zachodzą różnice:

Różnica piérwsza: W epicykloydach zwyczaynych punkt rodzący D. znaydował się na obwodzie iednego z kół służących za podstawę ostrokręgu ruchomego, — tu zaś (§. 11) leży na obwodzie koła współśrodkowego z kołem służącém za wspomnioną podstawę; — Połączywszy zatém punkt rodzący dayiny na to Z. ze wspólnym środkiem kół rzeczonych, kieruiąca ostrokręgu ruchomego przez tę liniią zostanie przeciętą w pewnym punkcie daymy na to X., ten punkt przecięcia weźmy za początek toczenia się kół, — czyli skieruymy poprzednio koło stałe z ruchomém tak, aby przed rozpoczęciem tworzenia się epicykloydy były styczne do siebie w punkcie X. — Gdy koło ruchome zacznie się toczyć a tém samém tworzyć epicykloyda, wypada oznaczać iéy rzuty. — W tym celu znayduiemy kład poziomy koła ruchomego, — odcinamy na nim łuk równy części obwodu koła stałego przebieżonéy kołem ruchomém, — punkt w którym to odcięcie przypadło łączymy ze środkiem koła ruchomego promieniem, — na tym promieniu poczynaiąc od wspólnego środka kół ruchomych odcinamy liniią równą linii łączącéy tenże wspólny środek z punktem Z; — ostatni punkt téy linii daymy na to Z. iest kładem poziomym punktu rodzącego; — Maiąc iuż kład punktu rodzącego, według wiadomych i dopiero co w poprzedzaiącém zagadnieniu zastósowanych prawideł wyznaczymy rzuty poziomy i pionowy punktu należącego do epicykloydy przedłużonéy lub skróconéy zewnętrznéy i wewnętrznéy w każdém położeniu koła ruchomego.

Różnica druga: Że przy tworzeniu epicykloyd zwyczaynych punkta zwrotu leżały na poziomé rzutów; — tu zaś punktów zwrotu nie masz (§. 14), — te zaś które maią podobieństwo do punktów zwrotu, są od niéy w pewnéy odległości, — więc nie będą siebie samych rzutami poziomemi, ale trzeba ich rzuty wyznaczać tak iak wszelkich innych punktów należących do epicykloyd przedłużonych lub skróconych.

Skrócenia iakieśmy wskazali w wyznaczaniu rzutów epicykloyd zwyczaynych, i tu się zastósować dadzą.

§. 19. — Epicykloyda sferyczna skrócona tak zewnętrzna iak wewnętrzna zamienić się może na płaską i na koło, które iest szczególną odmianą epicykloydy skróconéy (§. 6. uwaga). — Następuie to w ten czas, kiedy punkt rodzący daymy na to Z. znayduie się na osi ostrokręgu ruchomego. — Ponieważ tak ostrokrąg stały iak ruchomy są proste, — a zatém w czasie obrotu ruchomego punkt rodzący Z. zawsze w iednakowéy będzie się znaydował odległości od osi ostrokręgu stałego i od poziomé rzutów, — a tém samém zakréśli kółon na płaszczyznie równoodległéy od poziomé rzutów; — to zaś koło iest epicykloydą skróconą.

Co do rzutów poziomego i pionowego takowéy epicykloydy: — Widoczną iest że poziomym będzie koło współśrodkowe z kieruiącą ostrokręgu stałego; — ieżeli zatém wyznaczymy rzut poziomy punktu rodzącego, i odległością tego rzutu od rzutu osi ostrokręgu stałego zakreślimy koło współśrodkowe ze stałém, — to będzie rzutem poziomym epicykloydy skróconéy. — Łatwo spostrzedz że w tym razie rzut poziomy i naturalna wielkość epicykloydy niczém się nie różnią. — Co do rzutu pionowego: Będzie nim liniia prosta równa średnicy rzutu poziomego którym iest koło, — a to dla tego: — Rzut pionowy każdego punktu epicykloydy iest wzniesienie się punktu rodzącego nad poziomą rzutów, — tu zaś wzniesienie się to zawsze iest iednakowe, — a zatém cały rzut pionowy znaydować się musi na linii prostéy równoodległéy od osi LM. — Jeżelibym oznaczył iakikolwiek punkt należący do rzutu pionowego epicykloydy, i przez niego poprowadził liniią równoodległą od pozioméy rzutów (liniia ta iest śladem pionowym płaszczyzny na któréy leży cała epicykloyda), — ta liniia będzie rzutem pionowym epicykloydy. — Idzie ieszcze o znalezienie, iaka iéy długość należy do rzutu pionowego. — Łatwo tę długość znaydziemy prowadząc styczne do koła które iest rzutem poziomym epicykloydy, aby zarazem były prostopadłe do LM, — styczne te przedłużone przetną się z liniią oznaczaiącą kierunek rzutu pionowego, — a część iéy zawarta między wspomnionemi stycznemi daie nam wielkość rzutu pionowego epicykloydy.

§. 20. — Widzieliśmy że w czasie obrotu koła ruchomego po stałém punkt rodzący zmieniał swoię odległość od punktu styczności, — a tém samém liniia łącząca dwa wspomnione punkta zwana tworzącą epicykloydy przybierała różną długość; — była naprzód zerem, potém rosła ciągle dopóki nie stała się równą średnicy koła ruchomego, i to było iéy maximum; — daléy zmnieyszała się wracaiąc znowu do swego minimum, czyli zamieniaiąc się na zero. — Gdybyśmy tę liniią uważali w ten czas kiedy koło ruchome bierze położenie nieskończenie blizkie względem poprzedzaiącego, moglibyśmy ią wziąźć za równą w obu razach czyli za stałą; — a punkt dotknięcia się kół stałego z ruchomém iako nieskończenie mało zmieniony, może bydź wzięty za środek kuli na któréy znayduie się boczek nieskończenie mały należący do epicykloydy rodzącym punktem zakreślony. — Prócz tego wspomniony boczek znayduie się na powierzchni kuli maiącéy swóy środek we wspólnym wierzchołku ostrokręgów. — A że boczek nieskończenie mały należący do krzywéy nie może się znaydować razem na dwóch kulach, nie będąc zarazem na przecięciu się dwóch płaszczyzn stycznych do kul wspomnio-

nych, — więc liniia styczna do epicykloydy sferycznéy powstaie z przecięcia się dwóch płaszczyzn stycznych do kół, których środki i promienie są dane. — Po tych ogólnych uwagach nad stycznemi do epicykloyd, przystąpmy do ich prowadzenia.

§. 21. — *Zagadnienie trzecie*: Poprowadzić liniią styczną do epicykloydy sferycznéy zwyczaynéy zewnętrznéy albo wewnętrznéy w punkcie (o, ó) na niéy danym.

Styczna do epicykloydy (fig. 1) w punkcie (o, ó) iest prosta powstaiaca z przecięcia się dwóch płaszczyzn, — iednéy stycznéy do powierzchni kuli maiącéy swóy środek w wierzchołku ostrokręgów (S, Ś), a za promień odległość punktu rodzącego od (S, Ś), — drugiéy stycznéy do kuli w (H, H′) maiącéy swóy środek, a za promień odległość tegoż punktu (H, H′) od (o, ó) należącego do epicykloydy; albowiem na obu tych kulach punkt (o, ó) się znayduie. — Moglibyśmy zatém wyznaczyć tę styczną wyznaczywszy przecięcie się płaszczyzn wspomnionych. Ale że częstokroć wypadłaby konstrukcyia niedogodna, bo ślady linii stycznéy nieraz mogłyby w wielkiéy znaydować się odległości; — z tych przyczyn do wyznaczenia linii stycznéy do epicykloydy użyiemy następuiącego sposobu:

Jeżeli poprowadzimy: naprzód w punkcie danym dwie normalne iednę do iednéy, drugą do drugiéy z kul maiących na sobie boczek nieskończenie mały należący do epicykloydy; powtóre ieżeli poprowadzimy przez te normalne płaszczyznę; potrzecie nakoniec ieżeli do téy płaszczyzny poprowadzimy w punkcie danym prostopadłą; — Ta prostopadła będzie liniią wynikłą z przecięcia się dwóch płaszczyzn stycznych do kul wspomnionych, a tém samém będzie styczną żądaną.

Co do pierwszego, to iest co do normalnych: W punkcie (o, ó) normalną do piérwszéy kuli iest promień (So, Śó), łączący środek kuli (S, Ś) z punktem (o, ó) danym na iéy powierzchni. — Śladem poziomym téy normalnéy iest h., zaś pionowym S′. — Idzie o normalną w punkcie (o, ó) do drugiéy kuli: Wiemy że naturalną wielkością promienia drugiéy kuli iest na kładzie poziomym liniia łącząca punkt p. z punktem D′; — gdybyśmy tę długość mieli oznaczoną w przestrzeni w położeniu właściwém, tém samém wiedzielibyśmy kierunek normalnéy drugiéy kuli, — bo i tu, iak w każdéy kuli, promień iest iéy normalną. — Rzutem poziomym téy normalnéy iest prosta łącząca rzut poziomy o. punktu należącego do epicykloydy w którym chcemy prowadzić styczną z punktem styczności kół, czyli z H, a zatém iest liniia Ho. — Łatwo spostrzedz że śladem poziomym ostatniéy normalnéy któréy rzut

poziomy Ho., będzie punkt H, gdyż ten punkt znayduie się na obwodzie koła stałego, przeto widocznie na poziomey rzutów, a zatém iest przecięciem się normalnéy z poziomą rzutów, — czyli punkt H. iest śladem poziomym normalnéy. — Ślad poziomy ułatwi znalezienie rzutu pionowego normalnéy. — Jakoż: — Rzut pionowy śladu poziomego znayduie się na osi LM. w punkcie H′; — przez punkt H′. przechodzić musi szukany rzut pionowy normalnéy, — przechodzić on także musi przez punkt ó, — a zatém liniia H′ó. iest szukanym rzutem pionowym normalnéy. — Drugą zatém normalną iest (Ho, H′ó). — Potrzeba ieszcze wyznaczyć iéy ślady: — Poziomym iest H, bośmy go iuż wyżéy znaleźli, — pionowym h′.

Co do drugiego, czyli co do płaszczyzny przez powyższe dwie normalne przechodzącéy: — Liniie przez które ma bydź płaszczyzna przesunięta przecinaią się w punkcie (o, ó), więc może bydź przez nie przesunięta. — Że płaszczyzna żądana przechodzi przez normalne (So, S′ó), (Ho, H′ó), — więc ślady iéy przechodzić muszą przez ślady tych liniy. Śladami poziomemi wspomnionych liniy są punkta h, H, — a zatém liniia hu. przez te ślady przechodząca iest śladem poziomym płaszczyzny. — Podobnie śladami pionowemi normalnych są punkta S′, h′; — a zatém liniia uS′. iest śladem pionowym płaszczyzny. — Płaszczyzna więc któréyeśmy szukali iest (hu, uS′). — Jeżeliby ślady znalezionéy płaszczyzny przez normalne przechodzącéy nie przecięły się na osi LM, byłoby to dowodem błędnéy konstrukcyi.

Nakoniec co do trzeciego: — Chcemy z punktu (o, ó) danego na płaszczyznie (hu, uS′) wyprowadzić liniią prostopadłą do téyże płaszczyzny. — Rzuty żądanéy prostopadłéy są prostopadłe do śladów płaszczyzny. — Więc z punktu o. spuściwszy or. prostopadłą na ślad poziomy hu, — a z punktu ó. prostopadłą ór′. na ślad pionowy uS′ płaszczyzny przechodzącéy przez normalne, — liniia (or, ór′) iest styczną żądaną do epicykloydy w punkcie (o, ó) danym na epicykloydzie.

§. 22. — Za pomocą powyższego rozumowania i kreślenia w każdym punkcie danym na epicykloydzie sferycznéy zewnętrznéy i wewnętrznéy, potrafimy do niéy styczną poprowadzić. — Są iednak punkta w których metoda powyższa na pozór wydaie się nie dostateczną. — Takiemi punktami są: *naprzód* punkta zaczęcia czyli punkta zwrotu epicykloydy; — *powtóre* punkta epicykloydy utworzone w ten czas, kiedy punkt rodzący w czasie obrotu koła ruchomego znayduie się na płaszczyznie pionowéy rzutów. — Wypada przeto objaśnić że i tu wskazana powyżéy metoda iest dostateczną.

Co do

Co do piérwszego: Idzie nam o wyznaczenie styczney w punkcie zwrotu (D, i). — Trzeba *naprzód* w tym punkcie poprowadzić dwie normalne do kul na których leży (D, i) element, albo właściwiéy mówiąc boczek nieskończenie mały epicykloydy. — Promieniem piérwszéy kuli, a zarazem iéy normalną w punkcie (D, i) iest (SD, Si) tworząca ostrokręgu. — Promień drugiéy kuli iest nieskończenie mały, a środkiem téy kuli iest punkt D albo raczéy nieskończenie mały łuczek położony na poziomey rzutów; — przedłużenie tego łuczku w obie strony da nam styczną do koła stałego, a zarazem rzut poziomy normalnéy drugiéy kuli promienia nieskończenie małego. — Styczna w punkcie D. do koła stałego a zarazem rzut poziomy normalnéy drugiéy kuli iest Dw., rzut pionowy téy normalnéy widocznie leży na osi LM. — *Powtóre* przez liniie (SD, Si), (Dw, LM) trzeba poprowadzić płaszczyznę. — Łatwo spostrzedz że śladem poziomym téy przez normalne przechodzącéy płaszczyzny będzie Dw. liniia położona na poziomey rzutów; — ślad iéy pionowy ma przechodzić przez punkt Ś. będący śladem pionowym normalnéy (DS, iŚ), więc iéy ślad pionowy wŚ; — a zatém cała płaszczyzna iest: (Dw, wŚ). — Teraz *nakoniec* łatwo iuż z punktu D wyprowadzić prostopadłą do Dw, którą będzie DS promień koła stałego przez punkt zwrotu przechodzący; — a ten iest rzutem poziomym styczney — rzutem zaś pionowym iest iéy prostopadła z punktu i. na wŚ. spuszczona. — Styczną przeto wyznaczoną iest: (DS, iy). — Z tego się przekonywamy że i w tym razie metoda powyżéy wskazana prowadzenia stycznych iest dostateczną.

Co do drugiego punktu szczególnego, to iest gdy punkt rodzący epicykloydę znayduie się na pionowéy rzutów, i tu metoda ogólna iest dostateczną. — Daymy na to że mamy wyznaczyć styczną do epicykloydy w punkcie (a, A). — W tym razie normalną piérwszéy kuli iest (Sa, ŚA), — normalną drugiéy kuli (pa, pA); — płaszczyzna przez te normalne przechodząca iest LM pionowa rzutów; — do płaszczyzny LM w punkcie (a, A) wyprowadzona prostopadła (aA, A) iest styczną do epicykloydy w tymże (a, A) punkcie szczególnym.

§. 23. — Prowadzenie liniy stycznych do epicykloyd przedłużonych i skróconych tak zewnętrznych iak wewnętrznych odbywa się podług tychże prawideł co w epicykloydach zwyczaynych. — Nadto ani w epicykloydzie przedłużonéy, ani w skróconéy nigdy nieotrzymamy drugiéy z dwóch kul tyle razy wspomnionych nieskończenie małego promienia (chyba gdyby epicykloyda była nieskończenie mało przedłużoną lub skróconą): — więc w tym razie konstrukcya ieszcze lepiéy odpowie teoryi, bo mniéy będzie punktów szczególnych. 4

§. 24. — Na zakończenie materyi o epicykloydach sferycznych wypadałoby ieszcze podadź szczególne sposoby prowadzenia do nich stycznych przez punkta dane za epicykloydą, — albo równoodległe od liniy danych, — albo takich stycznych, któreby prostopadłemi były do liniy danych. — Lecz że epicykloydy sferyczne są liniiami podwóynéy krzywizny, przeto tém bardziéy nie zawsze konstrukcyia taka da się wykonać. — Chcemy wiedziéć w iakich razach można ią uskutecznić? — Gdybyśmy przez wszystkie punkta epicykloydy poprowadzili do niéy styczne, ich zbiór utworzyłby nam powierzchnią rozwiialną, któréy krawędzią zwrotu byłaby epicykloyda. — Jeżeliby punkt przez który ma przechodzić styczna znaydował się na téy rozwiialnéy, — albo liniia dana ieśliby była równoodległa od któréykolwiek stycznéy, lub do niéy miała kierunek prostopadły, — w tych tylko przypadkach prowadzenie stycznéy dałoby się wykonać. — Spostrzeżenie to prowadzi nas do wniosku, że gdyby rzut punktu albo linii był dany tylko np. poziomy, albo pionowy tylko, – iuż tém samém zawsze możnaby w rzeczonych razach poprowadzić styczną do epicykloydy, — bo można rzut drugi punktu albo linii przybrać w ten spósób, iżby zadosyć czynił potrzebnemu warunkowi.

W ogólności metoda ogólna prowadzenia stycznych do wszelkiéy linii krzywéy, może bydź dosyć wygodnie użytą w celu rozwiązania zagadnień iakieby tu poczynić można. — Sposób prowadzenia stycznych do krzywych wszelkiéy krzywizny, iako bardzo daleki związek maiący z epicykloydami, pomiiam.

ODDZIAŁ DRUGI.

Epicykloydy płaskie.

§. 25. — Wiemy że gdy ostrokręgi O i Ó staną się walcami, epicykloydy zamienią się płaskie (§. 4). — W tym razie kąt pomiędzy płaszczyznami na których leżą liniie krzywe kieruiące walców będzie równy dwom kątom prostym, — a zatém płaszczyzna iedna iest tylko przedłużeniem płaszczyzny drugiéy, albo raczéy obie kieruiące walców na iednéy znayduią się płaszczyznie. — Jak rozmaite są krzywe płaskie, tak rozmaite mogą bydź walce; a tém samém i epicykloyd płaskich może bydź nieskończenie wielka liczba. — My tylko rozbierzemy epicykloydy utworzone obrotem walców prostych maiących za kieruiące koła, — albo raczéy utworzone obrotem koła po kole, gdyż i tu można

walce pominąć (§. 10); — bo te tylko epicykloydy dotąd maią obszerne zastósowanie w praktyce. — Co do ramion, punktów zwrotu, i co do odległości pomiędzy iednym a drugim punktem zwrotu mierzonéy na obwodzie koła stałego czyli co do podstaw, epicykloyd płaskich, wszystko tu toż samo ma mieysce, cośmy powiedzieli (§. 13 i 14) o epicykloydach sferycznych.

§. 26. — Wystawmy sobie dwa koła: iedno (fig. 2.) promienia Sp. stałe, — drugie promienia rp. ruchome styczne do piérwszego w punkcie p: — wystawmy sobie daléy że koło promieniem rp. zakréślone toczy się swoim obwodem po obwodzie koła stałego tak iż zawsze są do siebie stycznemi, — punkt więc rodzący p. stale połączony z kołem ruchomém w czasie tego obrotu zakréśli epicykloydę płaską. — Idzie nam o wskazanie sposobu według którego można wyznaczyć punkta należące do epicykloydy płaskiéy naprzód zwyczaynéy zewnętrznéy albo wewnętrznéy.

Jeżeli koło ruchome (§. 10) weźmie położenie takie w czasie swego toczenia się po stałem, iż punkt dotknięcia (fig. 2) się będzie a, obaczmy iakie w tym razie weźmie położenie punkt rodzący, a tém samém wyznaczymy punkt należący do epicykloydy. — Widzimy że ieżeli koło ruchome toczy się po stałem, wszystkie punkta obwodu koła stałego dotykaią się wszystkich punktow obwodu koła ruchomego, — ztąd wypada że pxa równa się co do długości łukowi koła ruchomego zawartemu pomiędzy punktem styczności, a punktem rodzącym. — Jeżeli zatém wykreślimy koło równe kołu ruchomemu tak aby się ze stałem stykało w punkcie a, i na iego obwodzie odetniemy łuk poczynaiąc od a, i postępuiąc w stronę toczenia się koła ruchomego, — ostatni punkt tego łuku będzie należącym do epicykloydy. — Ale tym sposobem postępuiąc przy wyznaczaniu każdego punktu żądanéy linii, musielibyśmy kréślić nowe koła styczne, któreby nam wyobrażały potoczenie się koła ruchomego w każdy punkt koła stałego. — Bez tego kréślenia wygodnie się obeyśdź można — Jakoż wystawmy sobie że koła stykaią się w a; — na obwodzie więc koła ruchomego nie poruszaiąc go z mieysca, począwszy od p. postępuiąc w stronę iego toczenia się, odcinam łuk pp′=pxa; — gdyby koło ruchome znaydowało się w swoiém naturalném położeniu, punkt p′. należałby do epicykloydy. — Jeśli koło ruchome śliźnie się po stałém aż do a. tak aby tém samém punktem swego obwodu dotknęło się w a. obwodu koła stałego, — punkt p′. należący do epicykloydy zakréśli łuk p′i. promieniem Sp, — więc na łuku p′i. znayduie się punkt epicykloydy. — Gdybym wiedział odległość szukanego pun-

ktu ieszcze od iednego punktu, iużbym go miał wyznaczonym. — Znayduie się on na łuku p'i. w takiéy odległości od a, w iakiéy znaydował się na tymże łuku od p, — więc z punktu a. promieniem pp'. zakréślam łuk, który z łukiem pi przetnie się w punkcie i, a ten należy do epicykloydy. — Wprawdzie z przecięcia się z sobą dwóch łuków dwa powstaią punkta, — idzie o to który z nich należy do epicykloydy? — Jeżeli przez punkt styczności kół i przez S. wyprowadzimy liniią prostą, ieden z dwóch wspomnionych punktów pod nią, drugi nad nią znaydować się będzie, — ten się z nich bierze, który odpowiada położeniu punktu p' względem linii pr. także łączącéy środki kół i punkt ich styczności. — Że p' iest pod liniią rS, więc wzięliśmy za należący do epicykloydy punkt i leżący pod liniią Sa. — Toż samo da się zastósować do wszystkich innych punktów.

Wskazanym sposobem postępuiąc można oznaczyć tyle innych punktów żądanéy krzywéy ileby się nam spodobało, a tém samém wykréślić epicykloydę. — I tak np. biorę pxb=pp'p'', — promieniem Sp'' ze środka koła S, zakréślam łuk, — z punktu b, promieniem pp''. przecinam tenże łuk, — punkt k. należy do epicykloydy; — i t. d.

Jeżelibyśmy wzięli łuk pxabc równy połowie obwodu koła ruchomego, i znaleźli punkt m. epicykloydy odpowiadaiący punktowi styczności C, — z całéy epicykloydy punkt m. byłby naybardziéy oddalony od obwodu koła stałego, — bo iego odległość równa się średnicy koła ruchomego; — zaś w innych położeniach odległość ta iest mnieysza. — Punkt zatém m. można wziąść za maximum oddalenia się epicykloydy od obwodu koła stałego. — Maiąc część ramienia epicykloydy od punktu zwrotu do maximum oddalenia się, łatwo drugą część zupełnie z piérwszą symetryczną wykréślić, a tém samém skrócić szukanie punktów téy krzywéy. — Maiąc iedno ramie epicykloydy, łatwo inne wykréślić.

§. 27. — W punkcie i (fig. 2.) danym na epicykloydzie płaskiéy zwyczaynéy zewnętrznéy albo wewnętrznéy poprowadzić do niéy styczną.

Tworzącemi w epicykloydzie (§. 20.) są liniie łączące punkta dotknięcia się kół z punktem rodzącym, iak np. ai. — Widzimy że te odległości punktu rodzącego od punktu styczności są różne; — lecz kiedy zważymy dwa następne położenia koła ruchomego nieskończenie siebie blizkie, czyli że punkta iego się dotknięć z kołem stałém są nieskończenie siebie blizkie, — na ten przypadek i odległości punktu rodzącego od punktów dotknięć uważać można za równe sobie; — to iest: że boczek nieskończenie mały epicykloydy przy punkcie i. znayduiący się uwa-

żać można iako leżący na łuku promieniem ai. zakréślonym. — Jeżeli zatém w punkcie i. do ai. wyprowadzimy iw. prostopadłą, ta będzie styczną do łuku promieniem ai. zakréślonego, a zarazem styczną żądaną do epicykloydy, albowiem iest przedłużeniem boczku iéy nieskończenie małego. — Gdybyśmy zatém mieli dany punkt na epicykloydzie i chcieli w nim poprowadzić styczną, znaleźlibyśmy tylko odpowiadaiący mu punkt styczności kół, połączylibyśmy te dwa punkta liniią prostą: zowie się ona tworzącą, — a do niéy wyprowadzona prostopadła byłaby styczna żądaną. — Lecz iak znaleźć odpowiadaiący punkt styczności kół stałego z ruchomém? — Ze środka S. odległością danego punktu np. i od S. zakréślam łuk ip′, — odetnie on na kole ruchomém łuk pp′, — od punktu p. zaczynaiąc odcinam na kole stałém łuk pxa=pp′ co do długości, a punkt a. iest szukanym punktem styczności odpowiadaiącym punktowi i danemu na epicykloydzie. — Że ten a nie inny będzie, przekonywa nas dowodzenie w paragrafie poprzednim umieszczone wstecz wzięte.

Czasem unikaią prowadzenia prostopadłéy do tworzącéy epicykloydy następuiącym sposobem: Środki kół i punkt ich dotknięcia się są na iednéy linii prostéy Sw; — przecina się ona z kołem ruchomém w punkcie w; — punkt w. połączmy z punktem i, — liniia iw. iest żądaną prostopadłą do tworzącéy ai, a tém samém styczną do epicykloydy. — Sposób ten iest niedogodny, — bo chcąc w iakimkolwiek punkcie prowadzić styczną, trzeba mieć zarazem wykréślone tamże koło ruchome styczne do stałego w punkcie odpowiadaiącym danemu na epicykloydzie, — bez czego poprzednio się obeszło. — Z resztą drugi ten sposób prowadzenia stycznych w punktach maximum oddalenia się epicykloydy od obwodu koła stałego, na piérwszy koniecznie zamienić się musi.

Z punktów szczególnych w epicykloydach płaskich pod względem prowadzenia stycznych, są iedynie punkta zwrotu. — Okażemy że i tu sposób dopiero co wskazany iest na pozór tylko niedostateczny. — Jakóż daymy na to że trzeba poprowadzić styczną do epicykloydy w punkcie p. — Tu odległość punktu rodzącego od punktu dotknięcia się kół iest nieskończenie małą, a zatém tworząca epicykloydy nieskończenie mała; prostopadła do tworzącéy a zarazem styczna do łuku zakréślonego promieniem nieskończenie małym iest promień Sp. — Więc promień Sp. iest styczną żądaną do epicykloydy w punkcie szczególnym p.

§. 28. — Epicykloydy wewnętrznéy szczególną odmianą iest liniia prosta (§. 6. — uwaga). Następuie to w ten czas, kiedy koło ruchome

iest promienia dwa razy mnieyszego aniżeli stałe. — I tak niech będzie (fig. 3) koło promienia Sp. stałe, a koło promienia rp. dwa razy mnieyszego ruchome.— Chcąc wyznaczyć położenie punktu rodzącego p. w ten czas kiedy koło ruchome weźmie położenie takie iż dotknięcie się kół nastąpi w punkcie a, trzeba według ogólnego prawa przy punkcie a. wykréślić koło ruchome w wiadomy sposób styczne do stałego, i na nim odciąć łuk ai=ap łukowi koła stałego co do długości; — co wykonawszy mamy okazać że punkt i. należący do epicykloydy będzie na linii prostéy pS. — Wiemy że obwody kół maią się do siebie w stosunku swoich promieni; — więc obwód koła stałego iest dwa razy większy od obwodu koła ruchomego; — idzie zatém że i łuk koła stałego mierzący ieden stopień co do długości iest dwa razy większy od łuku koła ruchomego także ieden stopień mierzącego. — Widzimy zaś na figurze iż łuk pa. cały mierzy wielkość kąta pSa; — tenże kąt pSa. iako maiący swóy wierzchołek na obwodzie koła ruchomego biorąc ie w nowém iego położeniu, ma za miarę połowę łuku ai. zawartego między swemi ramionami. — Ztąd się przekonywamy że łuk ai. ma dwa razy więcéy stopni od łuku ap. — A że łuki są w stosunku promieni, więc iak się iuż rzekło, każdy łuk w kole większem np. ap. iest dwa razy dłuższy od łuku tyleż stopni maiącego w kole mnieyszém, w którém uważaliśmy łuk ai. — Widzimy zatém że aby uczynić na kole ruchomém łuk równy ap., trzeba połowę łuku ai. wziąść dwa razy, czyli trzeba wziąść cały łuk ai; — a zarazem widzimy że punkt i. należący do epicykloydy położony iest na linii prostéy Sp. — Toż samo da się powiedzieć o każdym innym punkcie téy epicykloydy.

§. 29. — Dotąd braliśmy punkt rodzący epicykloydę na obwodzie koła ruchomego; — możemy go wziąść albo zewnątrz (fig. 4), albo wewnątrz (fig. 5) obwodu, np. C.— W pierwszym razie otrzymamy epicykloydę przedłużoną, w drugim skróconą. — Sposób wynaydowania punktów należących do epicykloydy przedłużonéy i skróconéy tak zewnętrznéy iak wewnętrznéy, iest prawie ten sam, iakiśmy wyżéy podali w zwyczaynéy. — Jakoż wyznaczmy z nich niektóre, biorąc razem pod uwagę figurę 4tą i 5tą, abyśmy z piérwszéy widocznie się przekonali o wyznaczaniu punktów należących do przedłużonéy zewnętrznéy i wewnętrznéy, — a z drugiéy do skróconéy także zewnętrznéy i wewnętrznéy.

Punkt rodzący C. znayduie się na rp. promieniu koła ruchomego; — gdziekolwiek toż koło ruchome znaydować się będzie, punkt c. zawsze stale na linii rp. umieszczonym bydź nie przestanie. — Wystawmy sobie że koło ruchome od p. do a. przeszło; — aby w tym razie otrzy-

mać punkt należący do iedney z dwóch teraz uważanych epicykloyd; — znaydźmy naprzód położenie nowe punktu p. (§. 26), iest nim g; — punkt S. łączę z punktem styczności a, — na linii Sa, odcinam poczynaiąc od a. liniia ad, tak aby było ad=rp. promieniowi koła ruchomego, — punkt d, który iest środkiem koła ruchomego w nowém iego położeniu, łączę z punktem g, — na linii dg. odciąwszy di=rc, punkt i. iest należącym do epicykloydy, — bo iak się rzekło ten punkt nie może bydź gdzieindziéy, iak na promieniu koła ruchomego; — i t. d. — Podobnie postępuiąc znaydziemy punkta: k, m, i t. d.

§. 30. — Chcąc poprowadzić styczną do epicykloydy przedłużonéy albo skroconéy tak zewnętrznéy iak wewnętrznéy w punkcie i. (figura 4ta i 5ta) na niéy danym, — trzeba podług powyższego rozumowania (§. 28) w punkcie i. wyprowadzić do ai. tworzącéy prostopadłą iW, ta prostopadła będzie styczną żądaną.

§. 31. — Szczególnieyszą odmianą epicykloydy skróconéy tak zewnętrznéy iak wewnętrznéy iest koło (§. 6. — uwaga). — W ten czas się to dzieie kiedy (fig. 6) punkt rodzący c. znayduie się w środku koła ruchomego. — Samo zastanowienie się nad figurą dostatecznie czytelnika o téy prawdzie zdoła przekonać.

§. 32. — Dotąd braliśmy oba koła promieni skończonych; — lecz gdyby iedno z nich, przypuśćmy naprzód stałe, było promienia nieskończenie wielkiego, wtedy toż koło stałe zamieniłoby się na liniią prostą, — po któréy tocząc koło ruchome promienia skończonego, punkt rodzący stale z niém połączony zakréśli krzywą, — która iuż nie epicykloydą ale cykloydą się nazywa. — Cykloydy także według różnego położenia punktu rodzącego dzielą się na zwyczayne, przedłużone i skrócone. — Podział ich na zewnętrzne i wewnętrzne iakkolwiek w teoryi wydawałby się podobnym, w praktyce nie iest widocznym.

§. 33. — Jakeśmy wyznaczyli punkta epicykloydy (§. 26), według tychże samych zasad wyznaczymy i. punkta do cykloydy należące. — I tak (fig. 7) niech będzie AB. koło stałe nieskończenie wielkiego promienia, czyli króciéy mówiąc niech będzie liniia prosta AB, — po któréy niech się obraca koło ruchome promienia Ar.; — chcemy wyznaczyć krzywą utworzoną rodzącym punktem A. w czasie tego obrotu. — Daymy że koło ruchome potoczyło się do a, — gdzież się znayduie punkt rodzący? — Na obwodzie koła ruchomego odcinam łuk AA′=Aa linii prostéy przebieżonéy kołem ruchomém; — z punktu A′ wyprowadzam A′i równoodległą od AB., — z punktu a. promieniem AA′ tę równoodległą przecinam; — punkt iéy przecięcia i, należy do cykloydy. —

Podobnie daléy postępuiąc możemy wyznaczyć tyle innych punktów do cykloydy należących, ile nam się spodoba. — Połowa ramienia zawarta między punktem zwrotu A., a m. maximum oddalenia się punktu rodzącego od linii AB. iest zupełnie z drugą połową symetryczna; — maiąc zatém połowę tylko ramienia cykloydy, możemy wykréślić całe ramie, — a tém samém tyle innych ramion, ile się nam spodoba. — Ponieważ liniia prosta AB. może bydź do nieskończoności przedłużoną, więc ramion, podstaw i punktów zwrotu cykloydy znayduie się nieskończenie wielka liczba.

§. 34. — Chcąc poprowadzić styczną do cykloydy w punkcie iakimkolwiek na niéy danym np. i., według tego cośmy powiedzieli (§. 27) o epicykloydzie, do linii ai. która mierzy odległość pomiędzy punktem rodzącym a punktem styczności, albo raczéy do tworzącéy cykloydy w punkcie i. wyprowadziwszy iw. prostopadłą, ta będzie styczną żądaną.

§. 35. — Jak wyznaczaliśmy punkta należące do epicykloydy przedłużonéy i skróconéy, przez podobne postępowanie wyznaczymy należące do cykloydy przedłużonéy i skróconéy. — W celu przystósowania tego co się wyżéy powiedziało do przedłużonéy uważaymy figurę 8mą, a do skróconéy figurę 9tą. — Chcemy oznaczyć punkt należący do cykloydy, kiedy koło ruchome potoczy się do a. — Na kole ruchomém odcinam łuk AA'=Aa linii prostéy przebieżonéy kołem ruchomém, — z punktu A'. wyprowadzam A'g równoodległą od AB. aż do przecięcia się z łukiem z punktu a. promieniem AA'. zakréślonym, — w punkcie a. do AB. wyprowadzam ad. prostopadłą, tak aby było ad=Ar, — punkt d. łączę z punktem g. poprzednio znalezionym; — liniia dg. iest promieniem koła ruchomego na którym znayduie się punkt rodzący w teraźnieyszém iego położeniu. — Więc na promieniu dg. odcinam di=rc, — punkt i. należy do cykloydy. — Przez podobne temu postępowanie można wynaleźć tyle innych punktów ile się spodoba.

§. 36. — W punkcie i. (fig. 8. i 9,) danym na cykloydzie przedłużonéy albo skróconéy wyprowadzić do niéy styczną. — Punkt i. łączę z punktem a, — liniia ai. iest tworzącą cykloydy; — do ai. w punkcie i. wyprowadziwszy prostopadłą iw, ta iest styczną żądaną (§. 27).

§. 37. — Cykloyda skrócona może się zamienić na liniią prostą. — Ma to mieysce na ten czas kiedy punkt rodzący c. (fig. 10) znayduie się w środku koła ruchomego (§. 6. uwaga).

§. 38. — Gdyby koło ruchome było nieskończenie wielkiego promienia, a stałe promienia skończonego, epicykloyda zamieniłaby się na

liniią

liniią krzywą zwaną *rozwiiaiącą*. — Niech będzie koło stałe promienia Sa, — koło zaś ruchome niech się zamieni na liniią prostą ab. — Jeżeli ta liniia ab. toczyć się będzie po obwodzie koła stałego w ten sposób, iż nie przestanie do niego bydź styczną, — w ten czas punkt rodzący np. a. na niéy obrany zakréśli krzywą płaską zwaną rozwiiaiącą, — koło zaś stałe zowie się liniią rozwiniętą. — Jakakolwiek liniia krzywa może bydź rozwiniętą, — lecz my uważać będziemy koło; — taka liniia która powstaie z rozwinięcia koła, zowie się spiralną kołową. — Spiralna Archimedesa, lubo na oko wiele ma podobieństwa do rozwiiaiącéy koło, wszelako nie należy tak iak ona do liniy epicykloydalnych, — bo prawo iéy tworzenia się bez pewnych dodatków nie może bydź podciągnięte pod prawa tworzenia się liniy epicykloydalnych (§. 1). — Liniia rozwinięta na nieograniczoną liczbę liniy rozwiiaiących; — bo iakeśmy obrali za rodzący punkt a, tak możemy obrać inny, a ztąd wypadłaby inna rozwiiaiąca; — i t. d.

§. 39. — Jak wyznaczyć punkta należące do rozwiiaiącéy? To uskutecznimy podług zasad podanych wyżéy (§. 26). — I tak ieżeli np. liniia ab. weźmie położenie takie iż będzie styczną w punkcie á, — w ten czas długość łuku aá przeniósłszy na styczną w nowém iéy położeniu od á do k, — punkt k. iest należącym do epicykloydy, gdyż on iest nowém położeniem rodzącego punktu a. — Sposobem tym postępuiąc oznaczylibyśmy tyle innych punktów należących do rozwiiaiącéy, ileby się nam spodobało, — a tém samém wykréślilibyśmy rozwiiaiącą. —

Ale idzie nam o to, aby nie poruszaiąc z mieysca linii ab. wynaléźć wszystkie punkta rozwiiaiącéy. — Wystawmy sobie że liniia ab. iest styczną do okręgu koło w punkcie à, — długość łuku aá. odcinam na linii ab od a. poczynaiąc, to iest biorę ab=aá; — Gdyby ab. niezmieniaiąc na sobie punktu styczności, na obwodzie koła stałego śliznęła się z a do á, — punkt b. zakréśliłby łuk bk. promieniem Sb., na którym znayduie się punkt należący do rozwiiaiącéy; — znayduie się on na łuku bk. w takiéy odległości od punktu á, w iakiéy był położony od a. na linii ab. — A zatém z punktu á. promieniem ab. łuk bk. przeciąwszy, punkt przecięcia się k. iest szukany. — Tym sposobem wyznaczyć można wszystkie inne punkta należące do rozwiiaiącéy.

§. 40. — Chcąc poprowadzić do rozwiiaiącéy styczną w iakimkolwiek punkcie np. i. na niéy danym, trzeba według powyższego (§. 27) do tworzącéy ai. wyprowadzić prostopadłą iw, a ta prostopadła będzie styczną żądaną.

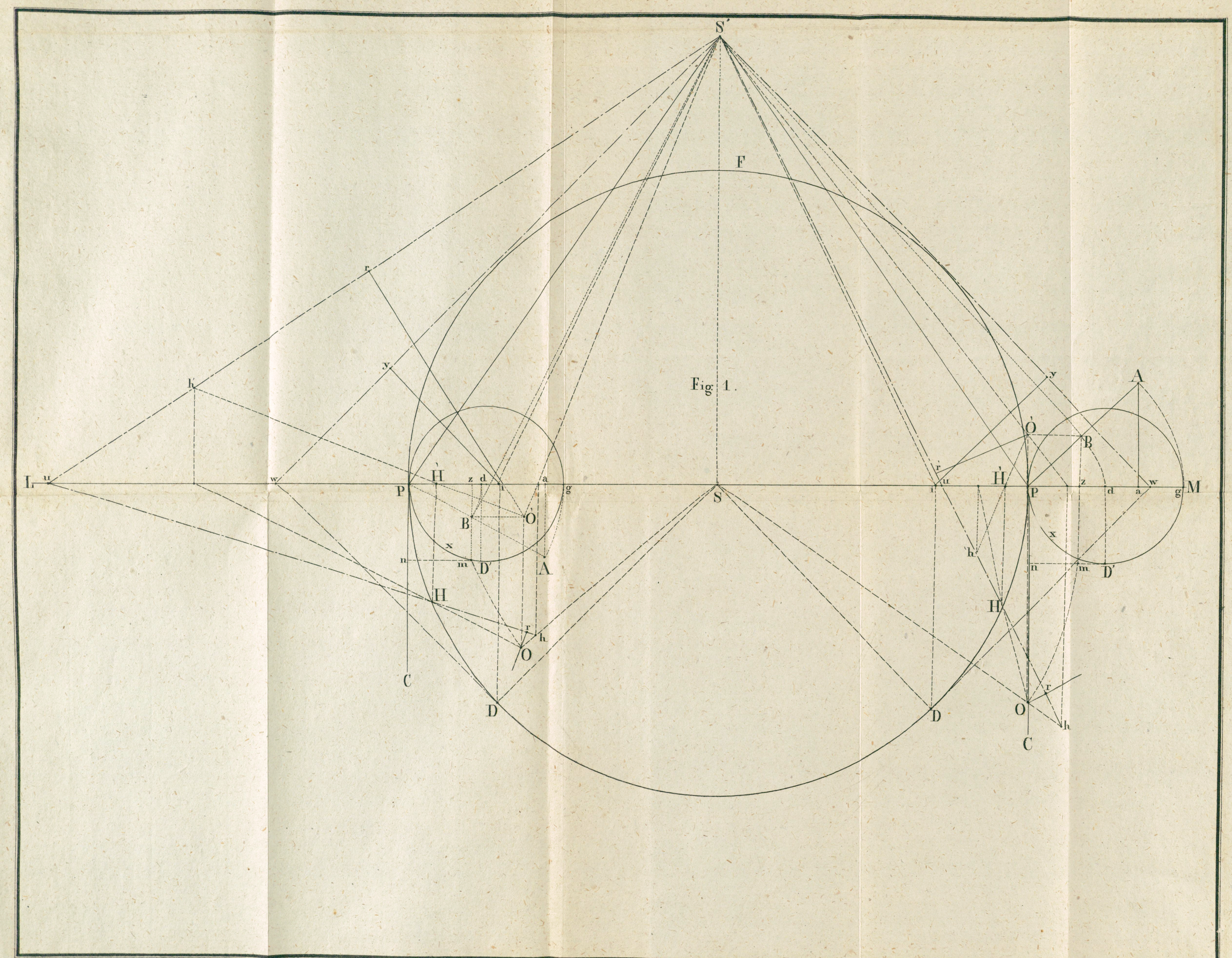
§. 41. — Widzimy że tworzące rozwiiaiącéy są stycznemi do rozwiniętéy, i że styczne rozwiiaiącéy są prostopadłe do tworzących téyże rozwiiaiącéy, — a zatém rozwiiaiącéy tworzące są zarazem iéy normalnemi. — Ztąd uważamy że i liniia rozwiiaiąca może ieszcze miéć swoie rozwiiaiące. — Bo np. gdybyśmy w punkcie i. wziętym na rozwiiaiącéy poprowadzili do niéy styczną iw. i gdybyśmy ią obracali około téyże rozwiiaiącéy aipmn. w ten sposób iżby w czasie swego obrotu nieprzestała do niéy bydź styczną, — punkt i. zakréśli rozwiiaiącą; — i t. d. — Punkt a. zowie się punktem zwrotu, — bo liniią ab. moglibyśmy toczyć i w drugą stronę, a ztądby się utworzyła inna rozwiiaiąca agKOT. maiąca swóy początek w a. —

§. 42. — Każda rozwiiaiąca ma swoię rozwiniętą. — Niech będzie rozwiiaiąca agkO, chcemy znaléźć iéy rozwiniętą. — Wiemy że tworzące rozwiiaiącéy są stycznemi do rozwiniętéy; — a że tworzące te są zarazem normalnemi do rozwiiaiącéy, — a zatém gdybyśmy obrali na danéy rozwiiaiącéy agko punkta a, x, q,...., nieskończenie siebie blizkie, i przez te punkta poprowadzili normalne ab, xs, qz,..., do rozwiiaiącéy, te byłyby tworzącemi, a tém samém stycznemi do rozwiniętéy szukanéy. — A że każda z tych normalnych z następuiącą po sobie przecinaią się w punktach nieskończenie siebie blizkich, — więc części przedłużonych normalnych między przecięciami każdéy poprzedzaiącéy ze swoią następną są boczkami nieskończenie małemi rozwiniętéy; — to iest: razem wzięte daią rozwiniętą szukaną. — Zdawaćby się mogło że liniia rozwiiaiąca ma iednę tylko rozwiniętą, — lecz ona ma ich nieograniczoną liczbę. — Dowodzenie téy prawdy zupełnie należy do materyi traktuiącéy o promieniu krzywości, — a z liniiami epicykloydalnemi bardzo daleki ma związek, — dla tego ie pomiiam. —

§. 43. — Naprzód braliśmy oba koła promieni skończonych, — potém stałe promienia nieskończenie wielkiego, a ruchome skończonego, — daléy odwrotnie wystawiliśmy sobie koło stałe promienia skończonego, a ruchome nieskończenie wielkiego, — i wyprowadziliśmy gatunki epicykloydalnych ztąd powstaiące; — postępuiąc tym porządkiem trzeba nareszcie przypuścić że oba koła są nieskończenie wielkich promieni, czyli że się zamieniły na liniie proste. — Lecz to ostatnie przypuszczenie na nic się nie przyda, — bo w tym razie żadnéy linii według powyższych prawideł nie utworzymy (§. 1). —

§. 44. — Aby uzupełnić ten drugi oddział, a zarazem objąć to wszystko co w ninieyszéy rozprawie zawartém bydź powinno, wypadłoby ieszcze podadź sposoby szczególne prowadzenia liniy stycznych

do każdéy z wymienionych w tym oddziale krzywych, ieżeli styczne te maią przechodzić przez punkt dany za krzywą, albo maią bydź równo-odległe lub prostopadłe do linii danéy. — Jednak w tych przypadkach musimy ieszcze, nawet i co do epicykloyd płaskich, przestać na ogólnych sposobach prowadzenia stycznéy do linii wszelkiéy krzywizny (§. 24).



w Instytucie Litograficznym Szkolnym w Warszawie

A. T. Turski Litografował.

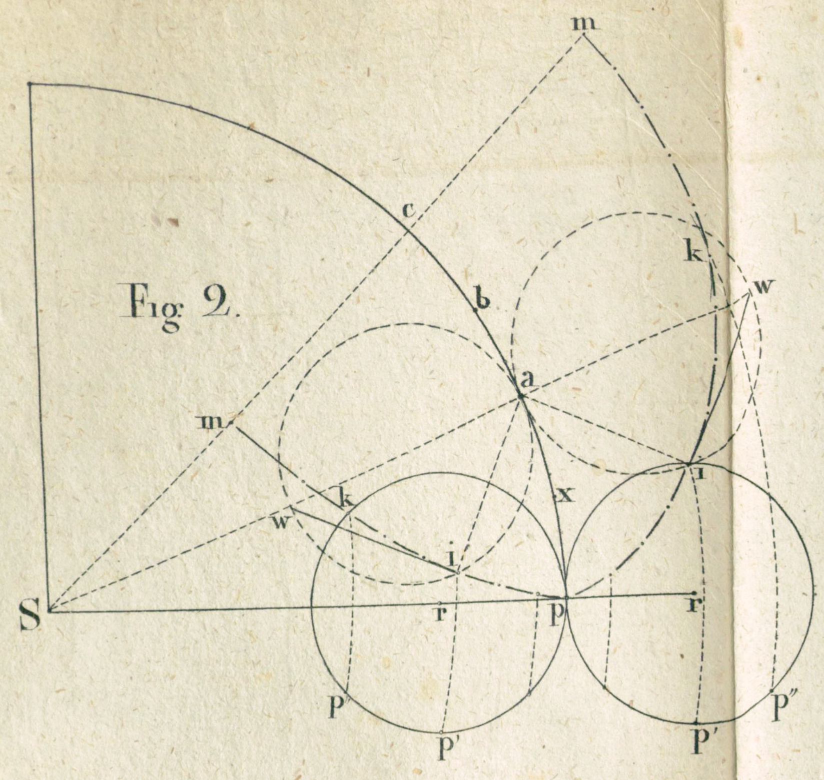


Fig. 2.

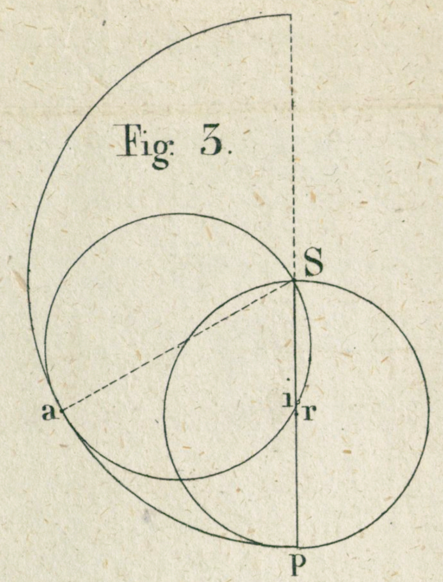


Fig. 3.

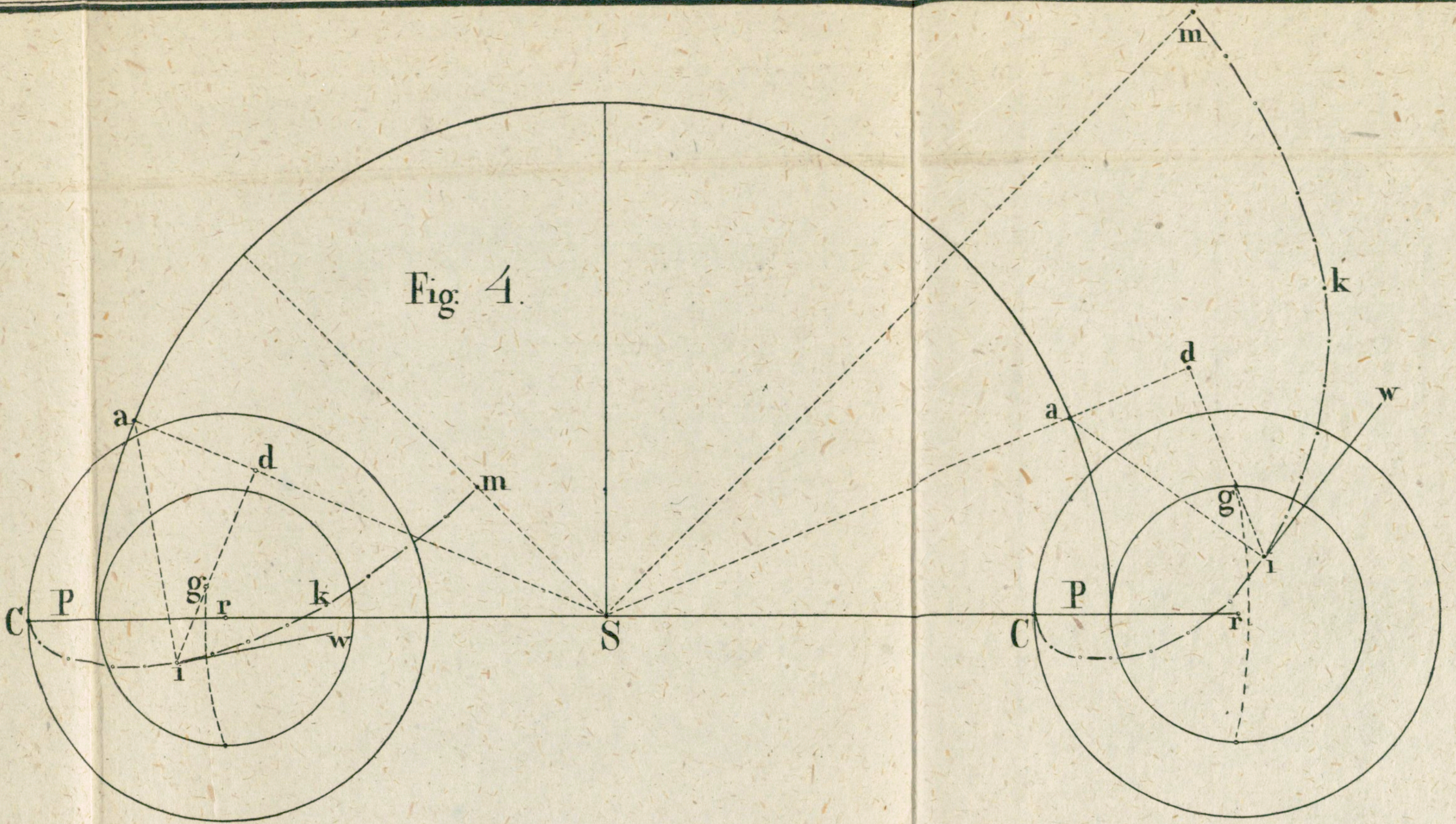


Fig. 4.

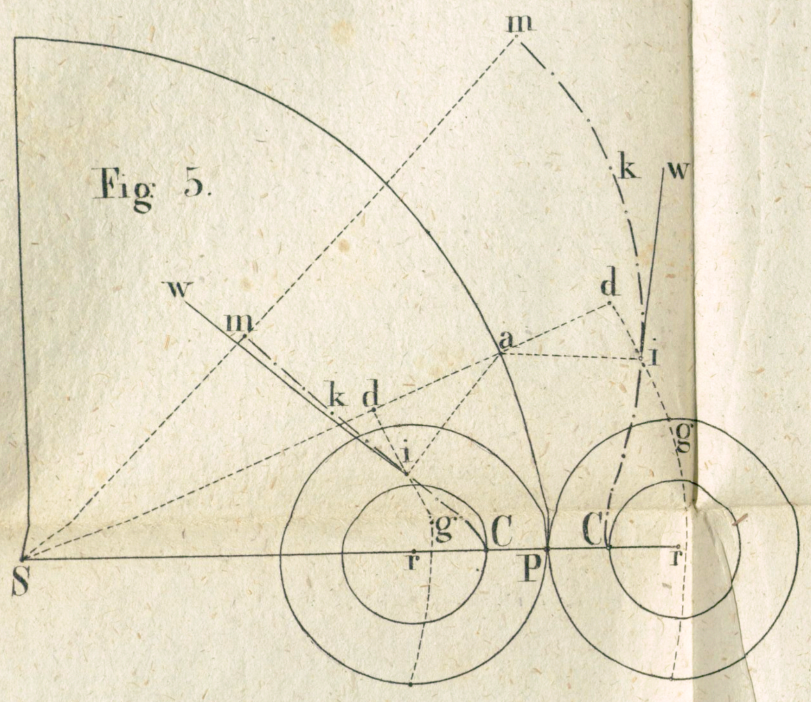


Fig. 5.

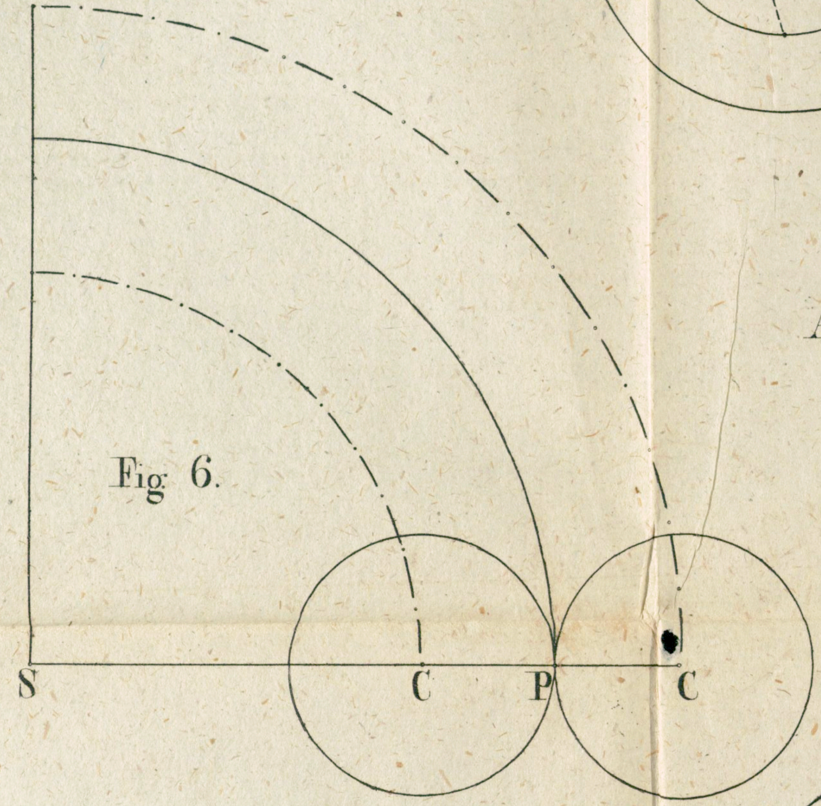


Fig. 6.

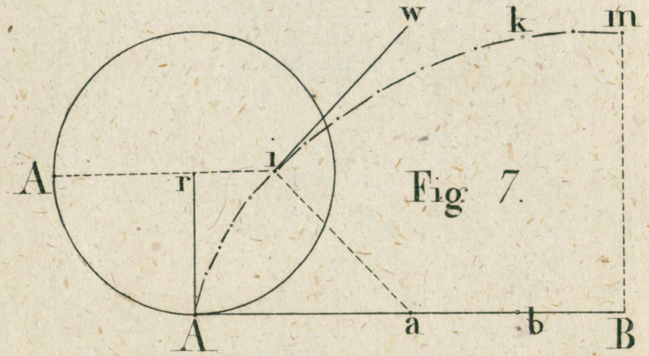


Fig. 7.

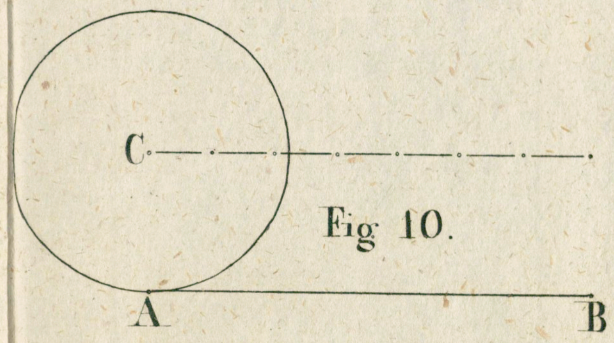


Fig. 10.

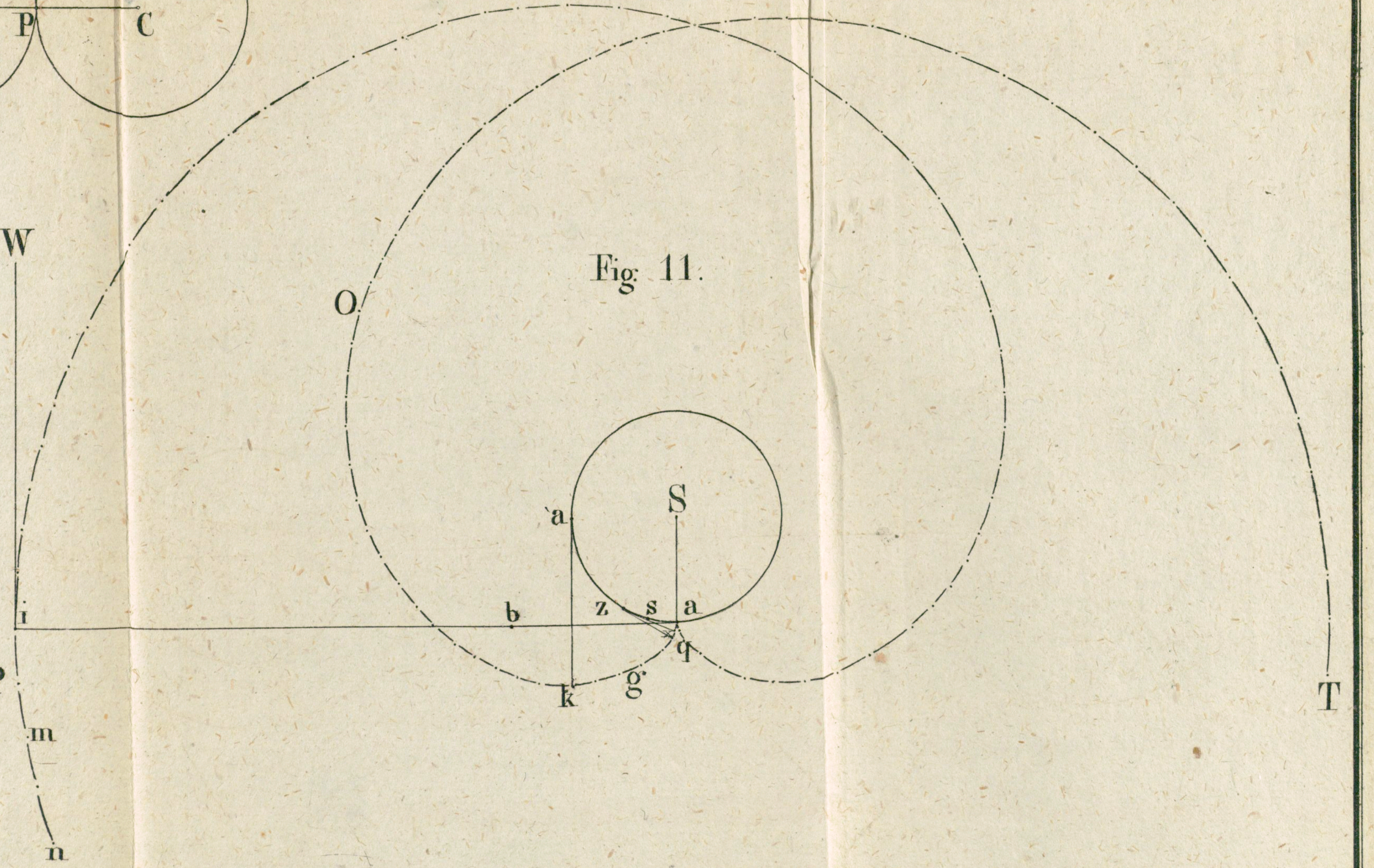


Fig. 11.

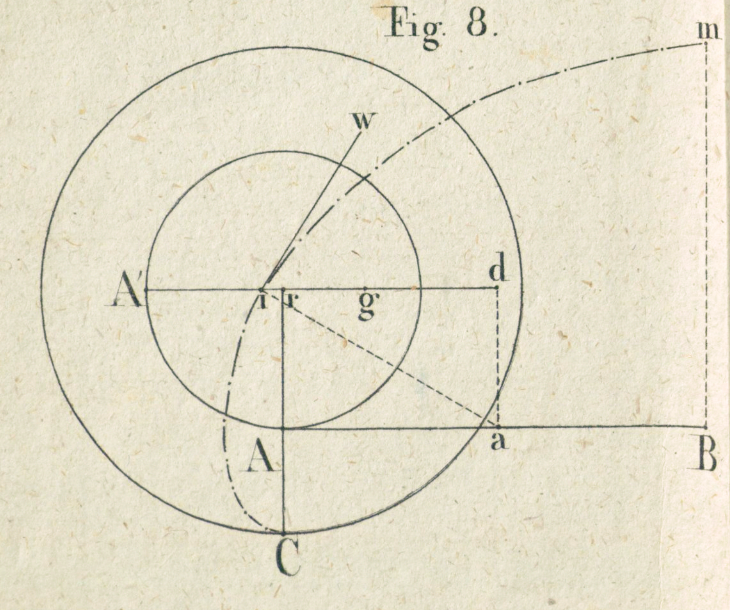


Fig. 8.

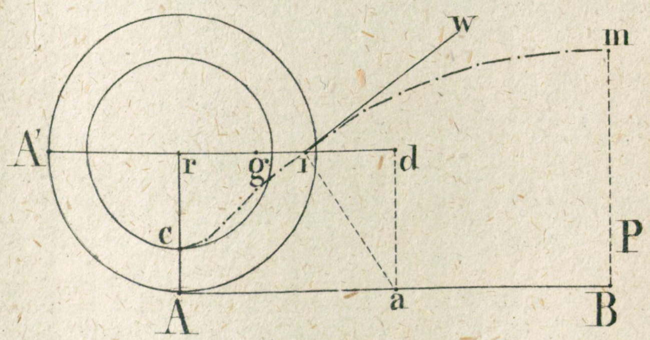


Fig. 9.

w Instytucie Litograficznym Szkolnym w Warszawie

A. T. Turski Litografo. 1838